



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

## **Una estructura de álgebra asociativa a menos de homotopía en el operad de cactus**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de  
Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

**Leandro Ezequiel Lombardi**

Director de tesis: Dr. Marco Andrés Farinati.

Directora Asistente: Dra. Ma. Inmaculada Gálvez Carrillo.

Consejero de estudios: Dr. Marco Andrés Farinati.

Buenos Aires, 31 de marzo de 2014



## Una estructura de álgebra asociativa a menos de homotopía en el operad de cactus

El objeto principal de estudio de esta tesis es el operad (diferencial graduado)  $\mathcal{Cacti}$  de cadenas de cactus sin espinas [MS02, BF04, Kau07]. El mismo consiste en las cadenas celulares del operad topológico de Cactus [Vor05].

En cuanto al operad  $\mathcal{Cacti}$ , en particular, se estudia el producto proveniente de la inclusión  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{Cacti}$  (donde  $\mathcal{A}$  es el operad que modela las álgebras asociativas). Este producto es asociativo pero no conmutativo.

Al simetrizar el mismo para obtener uno conmutativo, se pierde la asociatividad. En esta tesis se muestra que este producto es, sin embargo, asociativo a menos de homotopía. Es decir, si se considera el operad que codifica álgebras asociativas a menos de homotopía,  $\mathcal{A}_\infty$  [LV12], construimos *explícitamente* un morfismo de operads

$$\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\eta} \mathcal{Cacti}$$

que en aridad dos corresponde a dicho producto [GLT13]. De hecho, mostramos que el morfismo se factoriza como:

$$\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$$

donde  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  es la versión a menos de homotopía del operad  $\mathcal{A}^{(2)}$ , el operad que codifica *diálgebras combinadas* [Zin10].

Es sabido que el operad  $\mathcal{Cacti}$  actúa en el complejo de Hochschild  $C^*(A)$  para un álgebra asociativa  $A$  [GV95, MS02, BF04, Kau07]. De esta manera, el producto estudiado corresponde al producto *cup* de  $C^*(A)$ .

En toda  $\mathcal{Cacti}$ -álgebra puede considerarse un producto pre-Lie. En el caso de que la  $\mathcal{Cacti}$ -álgebra sea de la forma  $\overline{TV}$  para  $V$  un espacio vectorial, este producto, restringido a  $V$ , resulta asociativo. Se muestra que una estructura de  $\mathcal{Cacti}$ -álgebra en  $\overline{TV}$  induce una estructura de biálgebra asociativa y coasociativa en  $H = V \oplus 1_H$  donde  $1_H$  es la unidad formal de dicho producto. Esto muestra, junto con [Men04, Kad05], que estas estructuras están en correspondencia biunívoca con las estructuras de  $\mathcal{Cacti}$ -álgebra en  $\overline{TV}$  (que extienden la de álgebra asociativa) con cierta condición de compatibilidad con la graduación, propiedad motivada por el ejemplo del complejo de Hochschild.

Palabras clave: operads, operad de Cactus, álgebra asociativa a menos de homotopía, álgebras combinadas, complejo de Hochschild.



## An up-to-homotopy associative algebra structure in the cactus operad

The main object of study of this thesis is the (differential graded) operad *Cacti* of chains of spineless cacti [MS02, BF04, Kau07]. This operad is given by the (simplicial) chains of the (topological) operad of Cactus [Vor05].

Regarding the operad *Cacti*, we study the product coming from the inclusion  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{Cacti}$ . Here  $\mathcal{A}$  is the operad modelling associative algebras. This product is associative but not commutative. In order to get a commutative product, one can consider its symmetrization. Then the associative property is lost. In this thesis it is shown that this product is, nevertheless, associative up to homotopy. Let  $\mathcal{A}_\infty$  [LV12] be the operad that codifies associative algebras up to homotopy. Then, there is an operad morphism

$$\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\eta} \mathcal{Cacti}$$

which matches the mentioned product in arity 2 [GLT13]. In fact, this morphism factors as:

$$\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$$

where  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  is the up-to-homotopy version of the operad  $\mathcal{A}^{(2)}$ . This operad codifies *matching dialgebras* [Zin10]: algebras with two associative operations such that any linear combination is associative.

It is well known that the operad *Cacti* acts on the Hochschild complex  $C^*(A)$  of an associative algebra  $A$  [GV95, MS02, BF04, Kau07]. Here, the studied product corresponds to the *cup* product of  $C^*(A)$ .

In any *Cacti*-algebra a pre-Lie product. If the *Cacti*-algebra is  $\overline{TV}$  with  $V$  a vector space, this product turns out to be associative. We show that a associative and coassociative bialgebra structure arraises in  $H = V \oplus 1_H$  where  $1_H$  is the unit of this product. This shows, together with [Men04, Kad05], that there is a one to one correspondence between this kind of structures in  $H$  and *Cacti*-algebra structures in  $\overline{TV}$  (such that the associative algebra structure is given by the tensor product) subject to a compatibility condition (that is motivated by the Hochschild complex example).

Keywords: operads, Cactus operad, up-to-homotopy associative algebra, matching dialgebras, Hochschild complex.



# Agradecimientos

A Luciana y a Manuel. Esta tesis está dedicada a ellos. A Lula por acompañarme desde el principio, desde que comenzábamos nuestra familia. Por el simple y fundamental hecho de elegir estar a mi lado. A Manu porque su sola presencia me dio el empujón final.

A mi familia en el amplio sentido de la palabra, es decir, incluyendo la extendida y la política.

A los que de una manera u otra me guiaron durante este tiempo: Imma Gálvez, Marco Farinati, Andy Tonks y Gastón Giribet.

A los miembros del jurado que aportaron positivamente a esta tesis.

Al Conicet y a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires por permitirme realizar mis estudios de doctorado.

Parte de este trabajo fue realizado en Barcelona. Al Institut de Matemàtica de la Universitat de Barcelona y a la Universitat Politècnica de Catalunya por permitirme sendas visitas. A Carles Casacuberta, por ser el mejor anfitrión académico. A Bruno Vallette y Fernando Muro *for valuable* (y muy amenas) *discussions*. A los que me alojaron en su casa. Hicieron, así, posibles mis estadias en el extranjero. A Nicolás Ojeda Bär, por conseguirme [Seg04].

A los que condimentan mi vida con dosis de felicidad<sup>1</sup>, la fauna que hace del lugar de trabajo mucho más que eso: compañeros y vecinos de oficina, colegas de docencia, personajes del fútbol (de aquí y allá), un puñado de físicos teóricos, varios químicos y algún que otro biólogo. A José Luis Romero, Sergio Yuhjtman y Martín Mereb porque (además de pertenecer a la fauna antes descrita) me valí de su consejo. A las personas que me ayudaron a expresar otras facetas de mí mismo durante este período. Es pertinente porque esto afectó mi desempeño laboral, positivamente.

En un renglón: Si estás leyendo esta oración y te das por aludido, gracias.

---

<sup>1</sup>Lista demasiado larga para dar por extensión (y en la que involuntariamente habría omisiones)



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Operads</b>	<b>9</b>
1.1. Definiciones preliminares . . . . .	10
1.2. Álgebras a menos de homotopía . . . . .	22
1.3. Operads simétricos . . . . .	37
<b>2. El operad <math>\mathcal{Cacti}</math></b>	<b>43</b>
2.1. El operad de suryecciones . . . . .	44
2.2. El operad de Cactus . . . . .	46
2.3. $\mathcal{Cacti}$ como operad simétrico . . . . .	53
2.4. El complejo de Hochschild . . . . .	56
2.5. Álgebras tridendriformes y de cactus . . . . .	60
2.6. Álgebras de cactus simétricas . . . . .	74
<b>3. Una estructura <math>\mathcal{A}_\infty</math> en <math>\mathcal{Cacti}</math></b>	<b>81</b>
3.1. Las construcciones $\blacksquare$ y $\square$ . . . . .	83
3.2. Estructura $\mathcal{A}_\infty$ en $\mathcal{Cacti}$ . . . . .	88
<b>4. Compatibilidad con el grado</b>	<b>97</b>
4.1. Estructura de $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra en $TV$ . . . . .	100
4.2. Morfismos y compatibilidad con grado . . . . .	123
4.3. Comparación con otras estructuras . . . . .	131
<b>A. Teorías de campos</b>	<b>135</b>
Teorías de campos conformes . . . . .	140
A.1. Más detalles sobre teorías conformes . . . . .	154
<b>B. Código utilizado</b>	<b>171</b>
Código Fuente . . . . .	173
<b>Bibliografía</b>	<b>183</b>



# Introducción

En esta tesis se estudia el operad (diferencial graduado) *Cacti* de cadenas celulares de cactus (sin espinas) [MS02, BF04, Kau07]. Este operad describe las llamadas álgebras de Gerstenhaber y Voronov [GV95] (a menos de una conversión de graduación, ver apartado 2.4). En el mencionado trabajo, los autores muestran que esta estructura está presente en el complejo de Hochschild de un álgebra asociativa.

Un aporte original importante del presente trabajo (teorema 3.8) es mostrar que en toda álgebra sobre el operad de *Cacti* se tiene una estructura (explícita) de álgebra asociativa a menos de homotopía. En el caso del complejo de Hochschild, este producto corresponde a simetrización del producto cup (equivalente a este en homología). Este resultado es parte de [GLT13].

Como parte del estudio del operad *Cacti* se demuestra (ver apartado 2.5) que toda álgebra tridendriforme d.g. (ver [Cha02, 3.2]) es un álgebra de cactus. Además, al final del capítulo 2 se propone una definición de álgebra de cactus simétrica que contiene la de álgebra de brace simétrica [LM05, def.2].

Por otra parte, se estudian ciertas estructuras de *Cacti*-álgebra en  $\overline{TV}$  para  $V$  un espacio d.g. Se deduce que las mismas están en correspondencia (ver teorema 4.10) con las estructuras de biálgebra asociativa y coasociativa en  $H = V \oplus k \cdot 1_H$ . Para el caso en el que se tiene  $C = V \oplus k \cdot 1$  es una *dg*-coálgebra coaumentada, las estructuras de *dg*-biálgebra en  $C$  se corresponden con ciertas (i.e. compatibles con el grado externo) estructuras de *Cacti*-álgebra en  $\overline{TV} = \Omega C$ , de esta manera se extienden los resultados de Menichi [Men04] y Kadeishvili [Kad05].

La presente tesis se desarrolla en cuatro capítulos y dos apéndices. La misma se organiza de la siguiente manera.

En el primer capítulo se presentan los conceptos clave en teoría de operads que se utilizarán a lo largo de toda la monografía. El objetivo principal del mismo es presentar el operad  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$ , la versión a menos de homotopía del operad  $\mathcal{A}^{(2)}$  [Zin10] que codifica álgebras combinadas. Se busca ilustrar la analogía con el operad  $\mathcal{A}$  [LV12] que describe álgebras asociativas y  $\mathcal{A}_\infty$  que describe álgebras asociativas a menos de homotopía.

Consideramos que el presente trabajo se enmarca dentro de la topología algebraica y del álgebra homológica. Por este motivo se considera a la terminología de dichas áreas como parte del lenguaje técnico de la presente monografía y no se definirán dentro de la misma. Notables ejemplos son categoría y funtor, espacios vectoriales diferenciales graduados (o  $dg$ -espacios vectoriales), homología y conjuntos simpliciales.

Más allá de esto, se busca ser lo más auto-contenido posible. Por este motivo y debido a que el lenguaje de operads es esencial y, lamentablemente, no del todo difundido, es el objetivo de este capítulo definir y fijar la notación necesaria para el resto de la tesis. De todas maneras, no se pretende que la presentación sea completa sino más bien minimalista. La elección de este enfoque se hace evidente en la sección 1.2 donde se presentan las álgebras a menos de homotopía que nos interesaran en este trabajo (esto es, las modeladas por los operads  $\mathcal{A}_\infty$  1.31 y  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  1.32). Se busca, sacrificando generalidad, mantener la exposición lo más accesible posible. Como referencia del tema, nos permitimos recomendar [LV12, MSS02].

De esta forma, el primer capítulo es una introducción, adaptada a las necesidades de esta tesis, de las definiciones y construcciones generales. Las mismas se presentan con la mayor simpleza posible para ser utilizadas en los ejemplos que nos interesan: los operads  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{(2)}$  que modelan álgebras asociativas y álgebras combinadas [Zin10]. Como aporte original en este capítulo se tiene el hecho de que  $\mathcal{A}^{(2)}$  es Koszul (resultado obtenido independientemente en [ZBG12]) y la presentación explícita del operad  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$ .

Ya que en el presente trabajo el vocablo “operad” hace referencia a lo que en la literatura (por ejemplo [MSS02, LV12]) se denomina un “operad no simétrico” u “operad planar”, incluimos al final de dicho capítulo una sección donde se discute brevemente las diferencias entre ambos conceptos y su relación con el resto de la tesis.

En el capítulo 2 se estudia el operad de cadenas celulares de cactus topológicos sin espinas,  $\mathcal{Cacti}$  [MS02, BF04, Kau07]. El mismo será el objeto central de estudio en el resto de la tesis.

Se comienza identificándolo como suboperad del operad de suryecciones  $\mathcal{X}$  de [BF04]. El operad  $\mathcal{Cacti} \subset \mathcal{X}$  es el generado por las suryecciones que poseen cierta propiedad (ver definición 2.4) que llamaremos, justamente, *cactus*. Luego se presenta una notación geométrica para los cactus justificando, podría decirse, su nombre.

Hacia la postre del capítulo (apartado 2.4, se exhibe el emblemático de álgebra de cactus que es el origen histórico del mismo:  $C^\bullet(A)$ , el complejo de Hochschild de un álgebra asociativa. Esto se consigue relacionando (vía la suspensión operádica) la definición original de álgebra de Gerstenhaber-Voronov [GV95] con la de álgebra de cactus.

Luego se presenta la relación entre álgebras tridendriformes y álgebras de cactus, surgida a partir de comentarios de M. Ronco sobre una versión preliminar de la tesis. Como aporte original, se obtiene que toda álgebra tridendriforme d.g. es un álgebra de cactus. Más precisamente, si  $t\mathcal{D}$  es el operad que axiomatiza las álgebras tridendriformes (ver definición 2.21, también resulta la suspensión del operad presentado en [Cha02, 3.2]) se tiene un morfismo de operads d.g. (ver 2.13):  $\mathcal{Cacti} \rightarrow t\mathcal{D}$ . Esto se consigue basandose en lo conocido para el caso no graduado [Ron00, BR10].

Un álgebra de brace es un álgebra sobre el suboperad  $\mathcal{B}$  (no d.g.) de los cactus de dimensión máxima. Estos junto con el cactus  $\mathcal{V}^{\binom{2}{1}}$  generan todo  $\mathcal{Cacti}$ . Un álgebra de brace simétrica (ver [LM05, 2]) es una variante de álgebra de brace invariante por la permutación de (algunas) entradas. Ante la sugerencia de M. Ronco de estudiar de que manera dar un análogo a las braces simétricas en el caso de  $\mathcal{Cacti}$  nos permitimos sugerir una definición de álgebra de cactus simétrica. Esto es, valiéndonos de la correspondencia entre estructuras preLie y de brace simétricas (ver [LM05, OG05]) y del hecho de que se tiene  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{Cacti}$  donde  $\mathcal{P}$  es el operad preLie (suspendido), La propuesta es considerar  $Sym\mathcal{Cacti}$ , el suboperad (d.g.) generado por  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{V}^{\binom{2}{1}}$ :

$$Sym\mathcal{Cacti} = \left\langle \begin{array}{c} \binom{2}{1} \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \binom{2}{1} \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \right\rangle_{\text{operad}} \subset \mathcal{Cacti}$$

De esta manera, se tiene una estructura de brace simétrica en el sentido de [LM05] con un producto asociativo compatible.

En el capítulo 3 se estudia el producto inducido por el morfismo de operads

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\hookrightarrow \mathcal{Cacti} \\ m_2 &\mapsto \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} \end{aligned}$$

Este producto es asociativo y no conmutativo. Sin embargo, existe una homotopía que resuelve la falla de la conmutatividad:

$$\delta \left( \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array}$$

Por lo tanto es conmutativo en la homología de cualquier *Cacti*-álgebra. Si se quiere un producto equivalente (en homología) pero conmutativo se puede considerar el producto dado por  $\begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array}$ . Al hacer esto se pierde la propiedad asociativa. El resultado principal del capítulo, el teorema 3.8, muestra que este nuevo producto resulta asociativo a menos de homotopía. Esto es, construye explícitamente un morfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\infty &\xrightarrow{\eta} \mathcal{Cacti} \\ m_2 &\mapsto \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} \end{aligned}$$

Este morfismo se consigue vía la factorización (no obvia *a priori*)

$$\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$$

donde en los dos generadores (como operad) de  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  de aridad dos son asignados a  $\begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array}$  y  $\begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array}$ . El morfismo  $\mu$  se construye de manera inductiva a vía  $\square$  y  $\blacksquare$ , dos construcciones sencillas. Este par de operaciones y la composición con el elemento que da la homotopía para la conmutatividad se encuentran íntimamente relacionadas:

$$u^\square - u^\blacksquare = \pm \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 u - u \circ_n \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array}$$

para  $u$  un cactus con cierta propiedad. Esto da lugar a un comportamiento particular con el diferencial del operad *Cacti* y por lo tanto permite demostrar que  $\mu$  es un morfismo de operads.

Por otra parte se describe la imagen del morfismo  $\eta$ . Es decir, si  $m_n$  es el generador (como operad) de  $\mathcal{A}_\infty$  en aridad  $n$  y  $\eta(m_n) = \sum_{u \in \mathcal{C}'(n)} u$  se determina el conjunto  $\mathcal{C}'(n)$  de manera sencilla.

Como aplicación, se ilustra el caso del producto cup. Es un resultado clásico que el operad *Cacti* actúa en  $C^*(A)$  el complejo de Hochschild de un álgebra asociativa  $A$  [GV95, BF04, MS02, Kau07]. El producto estudiado corresponde ni más ni menos que al producto *cup* de  $C^*(A)$ . Por lo tanto, la simetrización del producto cup es asociativa a menos de homotopía.

En el capítulo 4 se estudian un tipo particular de *Cacti*-álgebras. Más precisamente, se estudian las álgebras de la forma  $\overline{TV}$  para  $V$  un espacio vectorial, con la graduación tensorial. Dado que  $\overline{TV}$  es un álgebra asociativa (libre) con el producto tensorial, nos concentraremos en el caso en que la estructura de *Cacti* álgebra sea coherente con esto. Es decir, se tiene

$$\mathcal{V}^2(x, y) = x \otimes y$$

De esta manera, la estructura de *Cacti* álgebra *extiende* (definición 4.3) la de álgebra asociativa. Pediremos además (motivados en el ejemplo del complejo de Hochschild) cierta condición de *compatible con el grado* (definición 4.4). Esta condición, en particular implica que el producto  $*$  dado por

$$x * y := (-1)^{|x|} \mathcal{V}^2(x, y)$$

que, en principio, es pre-Lie, resulta asociativo al restringirlo a  $V$ . Notar que esto ocurre también en el ejemplo de Hochschild ya que, al restringirse a grado uno, la operación en cuestión es la composición de funciones.

Consideramos  $H = V \oplus k1_H$  donde  $1_H$  es el neutro formal de  $*$ . Se muestra (ver teorema 4.10) que el producto  $*$  y el coproducto inducido por el diferencial dan lugar a una estructura de biálgebra en  $H$ . Más aún, si se tiene una biálgebra  $(H, \Delta, *, \epsilon, 1_H)$  asociativa unitaria y counitaria, se considera  $V$  el ideal de aumentación, entonces  $\overline{TV}$  tiene determinada una estructura de *Cacti*-álgebra, que extiende a la de álgebra asociativa y es compatible con el grado.

Esta construcción se relaciona con la construcción *bar* de la siguiente manera. Si  $H$  es una coálgebra, se tiene en  $\overline{TV}$  una estructura de *dg*-álgebra asociativa. En caso de que además  $H$  sea una biálgebra (c.f. [Men04, Kad05]), esta estructura se extiende a una *Cacti*-álgebra compatible con el grado.

Luego se estudia qué implicancias (ver lema 4.12) tiene dicha propiedad sobre los morfismos en la categoría de *Cacti* álgebras. Se concluye a partir de esto que la construcción *cobar* da lugar a una equivalencia de categorías entre

biálgebras y álgebras de cactus compatibles con el grado.

Otra implicación de dicho estudio es el teorema 4.16. El mismo dice que si se tiene un álgebra (d.g.)  $A$  y una biálgebra (d.g.)  $H$ , el conjunto de estructuras de  $H$ -módulo álgebra en  $A$  están en correspondencia biunívoca con los morfismos  $\overline{TV} \rightarrow C^\bullet(A)$  de  $\mathcal{Cacti}$  álgebras (ambas son compatibles con el grado). Dada un álgebra d.g.  $A$ , este teorema determina para cada estructura de  $H$ -módulo álgebra en  $A$ , un morfismo de álgebras de Gerstenhaber

$$H^\bullet(\Omega(H)) \rightarrow HH^\bullet(A)$$

En el apéndice A se presenta el operad  $\mathcal{Cacti}$  como el operad algebraico dado por las cadenas singulares del operad topológico de Cactus [Vor05] al considerar sus cadenas celulares. En cierto sentido y a modo de motivación, puede pensarse un cactus como una superficie infinitesimal. Siguiendo este modo de pensar, se presenta el operad topológico como un operad relacionado a las teorías de campos conformes desde la perspectiva de Segal [Seg04]. De esta manera, las cadenas de este operad se relaciona con las teorías topológicas conformes [Wit88, Get94, Kon95].

Se comienza por el paso desde una teoría de campos clásica a una teoría cuántica, para luego estudiar el caso de las teorías conformes y de ahí llegar a los operads de cactus topológico y  $\mathcal{Cacti}$ . El mismo describe, desde una perspectiva personal, la motivación del autor para estudiar el operad de cactus. De esta manera, el material allí expuesto no es necesario, desde un punto de vista estricto, para el desarrollo y comprensión de los resultados expuestos en el capítulo 2. Es por eso que nos permitimos la licencia de utilizar un lenguaje matemático no del todo preciso. En otras palabras, se sacrifica rigurosidad en la exposición con el objetivo de hacerla más entendible y amena.

En este apéndice se comienza por introducir brevemente teorías de campos como contextualización de las teorías conformes. En el mismo se describe un formalismo matemático para tratar teorías de campos. Desde este punto de vista, se define una teoría de campos como un funtor que parte de alguna categoría de cobordismo y toma valores en espacios vectoriales (o espacios de Hilbert). La simetría de la teoría está codificada en la categoría de cobordismo elegida. No se busca la completa (no posible aún) rigurosidad matemática para definir teorías cuánticas sino exponer las ideas físicas detrás de los objetos matemáticos que nos interesan.

En la siguiente sección, la más importante del apéndice, se toma como punto de partida las teorías conformes desde la óptica de Segal [Seg04] y se busca llegar al operad de *Cacti*.

Se define una *teoría conforme* como un funtor (proyectivo)

$$U : \mathcal{RS} \rightarrow \mathcal{Hilb}$$

desde la categoría (de cobordismo) de superficies de Riemann (superficies compactas con una estructura compleja) a espacios de Hilbert. Como aporte conceptual en la presentación podemos mencionar el hecho de incluir el semigrupo de difeomorfismos de  $\mathbb{S}^1$  como flechas en la categoría.

Luego se estudia la subcategoría  $\mathcal{C}$  dada por los cilindros. Al restringir la teoría se tiene una representación  $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Hilb}$ . Esta induce una representación (unitaria) del álgebra de Virasoro. De manera recíproca, cualquier representación de este tipo se extiende a una representación de  $\mathcal{C}$ . En consiguiente, se estudian dichas representaciones y de qué manera están determinadas, a su vez, por sus vectores de peso máximo. Se presenta también la equivalencia entre este concepto y la definición de Segal de *campo primario*. A partir de ahí se introduce la correspondencia estado-operador.

Dado que toda superficie se puede descomponer en cilindros y pantalones (superficies de género nulo con tres componentes de borde), una teoría conforme queda determinada por su valor en ellas. En otras palabras, el valor de una teoría en las superficies de género nulo la determina. Es por eso que restringimos a  $\mathcal{S}_0$  la subcategoría de superficies con sólo un círculo saliente y género nulo. Se presenta en consecuencia al operad de cactus (topológico) como un caso “límite” o “infinitesimal” de superficies de  $\mathcal{S}_0$ . Por último se propone el estudio del operad de cadenas de Cactus como un *modelo de juguete* para teorías topológicas conformes [Wit88, Get94, Kon95, Cos07] a género cero.

En el apéndice B se adjunta y explica el código utilizado para los cómputos del capítulo 2. Este código ha sido fundamental para la investigación del operad *Cacti*. El hecho de implementar dicho operad en la computadora ha generado una arena donde generar ejemplos y experimentar conjeturas.



# Capítulo 1

## Operads

En este capítulo se presentan los conceptos básicos de la teoría de operads (planares o no simétricos) que se utilizarán como lenguaje a lo largo de todo el trabajo. Los operads [May72] buscan abstraer y modelar el concepto de operación. Un operad es esencialmente una colección de operaciones de distinta aridad junto con la composición parcial de las mismas [LV12, MSS02]. Esta composición parcial entre dos operaciones consiste en reemplazar el resultado de una en una de las entradas de la otra. La exposición se basa principalmente en [LV12] en cuanto a los contenidos, pero utilizamos la notación de [Mur11].

Comenzamos presentando, como ejemplo de la definición, el operad  $\mathcal{A}$  que modela álgebras asociativas. A continuación damos la definición de operad a través de composiciones parciales junto con otras definiciones y ejemplos básicos relacionados con este concepto. Luego se introducen los árboles como un lenguaje para expresar operads dado por objetos combinatorios. Se tiene así, por ejemplo, la construcción del operad libre.

En la sección 1.2, se expone el concepto de operad a menos de homotopía [Sta63, BV73] de un operad dado. El enfoque respecto a este concepto, la dualidad de Koszul [GK94] y la construcción cobar es más bien minimalista: se presenta lo necesario para poder definir los operads  $\mathcal{A}_\infty$  y  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  las versiones a menos de homotopía de los operads  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{(2)}$  [Zin10].

En la última sección se introduce el concepto de operad simétrico, esto es, un operad cuyas operaciones  $n$ -arias tienen una acción del grupo simétrico  $S_n$  (junto con cierta compatibilidad). En dicha sección se discuten las diferencias entre el concepto de operad simétrico y no simétrico, haciendo especial énfasis en el uso de ambas nociones en el capítulo siguiente.

## 1.1. Definiciones preliminares

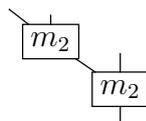
Pongamos como ejemplo un álgebra asociativa. La misma consiste en un espacio vectorial  $V$  conjuntamente con un producto asociativo  $x \cdot y$  para  $x, y \in V$ . El mismo es una operación binaria, llamémosla  $m_2$ . Esto es,

$$m_2 : V \otimes V \rightarrow V$$

Esquemáticamente, se puede pensar como una caja con dos entradas y una salida:



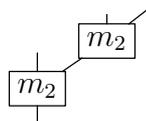
Ahora bien, uno podría construir una aplicación ternaria a partir de  $m_2$  aplicando ésta dos veces: Se calcula el producto de dos elementos y el resultado se multiplica por un tercero. Volviendo a la representación esquemática, esto sería:



Llamemos a esta operación  $m_2 \circ_1 m_2$ , donde la notación introducida  $\circ_1$  significa justamente que el resultado una operación se utilizará en la primera entrada de la otra. Esto es, para elementos  $x_1, x_2, x_3 \in V$ ,

$$(m_2 \circ_1 m_2)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$$

Se podría haber calculado también  $m_2 \circ_2 m_2$ , esto es:



Es decir, para elementos  $x_1, x_2, x_3 \in V$ ,

$$(m_2 \circ_2 m_2)(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$$

Como justamente el álgebra es asociativa, tenemos que ambas operaciones coinciden y definimos:

$$m_3 := m_2 \circ_1 m_2 = m_2 \circ_2 m_2$$

Es decir, se multiplican las tres entradas sin importar el orden en el que se realizan las operaciones (pero sí respetando el orden de los elementos). En cualquier aridad se puede realizar lo mismo, es decir, definir  $m_n$  como el producto de sus entradas sin importar la posición de los paréntesis.

Este ejemplo consiste entonces en una colección sencilla de operaciones  $n$ -arias. Pasemos ahora a la definición de operad, para luego volver al mismo.

**Definición 1.1.** ([LV12, 5.9.4][MSS02, 1.3][Mur11, 2.4 y 2.6]) Un *operad* (no simétrico o planar)  $\mathcal{O}$  en una categoría monoidal  $\mathcal{V}$  consiste en:

- Objetos  $\{\mathcal{O}(n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  que llamaremos *operaciones  $n$ -arias*.
- Morfismos (uno por cada  $n, m \in \mathbb{N}_0, i \in \{1, \dots, n\}$ )

$$\mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \xrightarrow{\circ_i} \mathcal{O}(n + m - 1)$$

a los cuales llamaremos *composiciones parciales*.

- Un elemento  $1 \in \mathcal{O}(1)$  identidad para las composiciones parciales, es decir, para cualquier  $w_n \in \mathcal{O}(n)$  y cualquier  $i \in \{1, \dots, n\}$  se tiene  $w_n \circ_i 1 = w_n = 1 \circ_1 w_n$ .
- Las composiciones cumplen la siguiente asociatividad:

$$(w_r \circ_i w_p) \circ_j w_q = \begin{cases} (w_r \circ_j w_q) \circ_{i+q-1} w_p & \text{si } j < i \\ w_r \circ_i (w_p \circ_{j-i+1} w_q) & \text{si } i \leq j < p + i \end{cases}$$

cualesquiera sean  $w_p \in \mathcal{O}(p), w_q \in \mathcal{O}(q), w_r \in \mathcal{O}(r)$ .

En este trabajo consideraremos operads en conjuntos, espacios topológicos y espacios vectoriales (diferenciales graduados). En estos contextos, en general, estudiaremos operads *reducidos*, esto es,  $\mathcal{O}(0) = \emptyset, \mathcal{O}(1) = 1$  en el caso de conjuntos y  $\mathcal{O}(0) = 0, \mathcal{O}(1) = \langle 1 \rangle$  para espacios vectoriales. Es decir, todos los operads serán reducidos si no se definen los espacios de operaciones 0-arias y 1-arias de manera explícita (como, por ejemplo en los operads  $\mathcal{E}nd$  a continuación y  $\mathcal{S}$  del capítulo A).

**Ejemplo 1.2.** Volvemos al ejemplo mencionado anteriormente, que llamaremos  $\mathcal{A}$ . Definido de manera precisa  $\mathcal{A}$  es el operad (en espacios vectoriales) dado por:

- $\mathcal{A}(1) = \langle 1 \rangle, \mathcal{A}(n) = \langle m_n \rangle$
- $m_n \circ_i m_m = m_{n+m-1}$ . (En particular:  $m_n \circ_i 1 = m_n = 1 \circ_1 m_n$ .)

**Ejemplo 1.3.** Para un espacio vectorial  $V$ , se puede considerar el operad (en espacios vectoriales)  $\mathcal{E}nd(V)$  (ver [LV12, 5.2.11 y 5.9.8]) dado por:

$$\mathcal{E}nd(V)(n) = \text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$$

y para  $f \in \mathcal{E}nd(V)(n), g \in \mathcal{E}nd(V)(m), i \in \{1, \dots, m\}$ , la composición parcial está dada por:

$$g \circ_i f(v_1, \dots, v_{n+m-1}) = g(v_1, \dots, v_{i-1}, f(v_i, \dots, v_{n+i-1}), v_{n+i}, \dots, v_{n+m-1})$$

cuya unidad es  $1_V$ , la identidad del espacio vectorial.

**Ejemplo 1.4.** Sea  $S$  el operad (en conjuntos) dado por

- $S(n) = S_n$  el grupo de permutaciones de  $n$  elementos.
- Para  $\sigma_p \in S_p, \sigma_q \in S_q$ , la permutación  $\sigma_p \circ_i \sigma_q \in S_{p+q-1}$  está dada por:

$$(\sigma_p \circ_i \sigma_q)(k) := \begin{cases} \sigma_p(k) & \text{si } k < i \text{ y } \sigma_p(k) < \sigma_p(i) \\ \sigma_p(k) + q - 1 & \text{si } k < i \text{ y } \sigma_p(k) > \sigma_p(i) \\ \sigma_q(k + 1 - i) + \sigma_p(i) & \text{si } i \leq k < i + q \\ \sigma_p(k + 1 - q) & \text{si } k \geq i + q \text{ y } \sigma_p(k) < \sigma_p(i) \\ \sigma_p(k + 1 - q) + q - 1 & \text{si } k \geq i + q \text{ y } \sigma_p(k) > \sigma_p(i) \end{cases}$$

Es decir, la permutación resultante se obtiene reemplazando el valor  $i$ -ésimo de  $\sigma_p$  por toda la permutación  $\sigma_q$  pero actuando en el conjunto  $\{i, \dots, i + q - 1\}$ .

**Definición 1.5.** Un *morfismo de operads*  $\mathcal{O} \xrightarrow{\phi} \mathcal{P}$  consiste en una colección de morfismos  $\{\mathcal{O}(n) \xrightarrow{\phi_n} \mathcal{P}(n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  que conmutan con las composiciones parciales y que cumple  $\phi_1(1_{\mathcal{O}}) = 1_{\mathcal{P}}$ .

Para  $\mathcal{O}$  un operad (en espacios vectoriales), una *estructura de  $\mathcal{O}$ -álgebra* en un espacio vectorial  $V$  consiste en un morfismo  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}nd(V)$ .

**Observación 1.6.** El concepto usual de álgebra asociativa (no unitaria) coincide con el de  $\mathcal{A}$ -álgebra.

### Operads diferenciales graduados

**Definición 1.7.** Un operad en la categoría de espacios vectoriales diferenciales graduados se abreviará *dg-operad*.

En otras palabras, en un  $dg$ -operad los espacios  $\mathcal{O}(n)$  son  $dg$ -espacios vectoriales y, por consiguiente, es parte de la estructura una graduación  $|\cdot|$  en cada uno de ellos y un diferencial

$$d : \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathcal{O}(n)$$

En cuanto a la definición de las composiciones parciales, se toma la noción estándar de morfismo en esta categoría, esto es, morfismo lineal de grado nulo compatible con el diferencial. En concreto, las  $\circ_i$  deben cumplir:

$$\begin{aligned} |v \circ_i w| &= |v| + |w| \\ d(v \circ_i w) &= dv \circ_i w + (-1)^{|v|} v \circ_i dw \end{aligned}$$

**Observación 1.8.** Notar que la construcción del ejemplo 1.3 se puede generalizar de manera canónica a  $dg$ -operads. Se consideran morfismos (ahora sí) de cualquier grado y el diferencial está dado por:  $df = d \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d$ . Para un  $dg$ -operad  $\mathcal{O}$ , una  $\mathcal{O}$ -álgebra consiste en un  $dg$ -espacio vectorial  $V$  y un morfismo (de  $dg$ -operads)

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}nd(V).$$

Proponemos la siguiente convención en el contexto de álgebras sobre un operad  $\mathcal{O}$ . Si  $\nu \in \mathcal{O}(n)$ ,  $\mu \in \mathcal{O}(m)$ ,  $x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m \in V$ , convenimos

$$(\nu \circ_i \mu)(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = (-1)^\varepsilon \nu(x_1, \dots, x_{i-1}, \mu(y_1, \dots, y_m), x_i, \dots, x_{n-1})$$

donde  $\varepsilon = \left( \sum_{j=1}^{i-1} |x_j| \right) \left( |\mu| + \sum_{j=1}^m |y_j| \right)$ .

A modo de ejemplo y para fijar notación en el caso de operaciones binarias, sea  $V$  un espacio d.g. con una estructura de  $\mathcal{O}$ -álgebra d.g. Sea  $\star \in \mathcal{O}(2)$ . Para  $x, y \in V$ , la expresión  $x \star y$  se define como

$$x \star y = (-1)^{|x||\star|} \star(x, y)$$

De esta manera, vemos que el hecho que  $\star$  sea asociativa se traduce en

$$\begin{aligned} (x \star y) \star z &= x \star (y \star z) \\ (-1)^{|x||\star|} (\star(x, y)) \star z &= (-1)^{|x||\star|} \star(x, (y \star z)) \\ (-1)^{(|x|+|y|+|\star|)|\star|} \star(\star(x, y), z) &= (-1)^{|y||\star|} \star(x, \star(y, z)) \\ (-1)^{(|x|+|y|+|\star|)|\star|} \star(\star(\cdot, \cdot), \cdot)(x, y, z) &= (-1)^{(|y|+|x|)|\star|} \star(\cdot, \star(\cdot, \cdot))(x, y, z) \end{aligned}$$

En el lenguaje de las composiciones parciales, la asociatividad se traduce en:

$$(-1)^{|\star||\star|} \star \circ_1 \star = \star \circ_2 \star$$

**Observación 1.9.** Todo operad en espacios vectoriales puede pensarse como operad diferencial graduado con graduación y diferencial triviales. Por ejemplo, el operad  $\mathcal{A}$  puede pensarse de esta manera. En el contexto de  $dg$ -operads, una  $\mathcal{A}$  álgebra es un álgebra d.g. (ya que  $\partial m_2 = 0$  se traduce en  $d(a.b) = da.b + (-1)^{|a|}a.db$ ).

Recordemos que si  $V$  es un espacio d.g. se define su suspensión  $\Sigma V$  en el mismo espacio base con graduación

$$|\cdot|_{\Sigma V} = |\cdot|_V + 1$$

y diferencial

$$d_{\Sigma V} = -d_V$$

Similarmente, se define la desuspensión,  $\Sigma^{-1}V$ , donde del grado original se sustrae la unidad.

Introduciremos a continuación el concepto de suspensión de un operad. Aunque no sea crucial en el desarrollo de la tesis, será cómodo contar con él en la última sección del capítulo 2.

**Definición 1.10.** Sea  $\mathcal{O}$  un operad diferencial graduado, la suspensión operádica  $\Sigma\mathcal{O}$  está determinada al considerar

$$(\Sigma\mathcal{O})(n) := \Sigma^{n-1}\mathcal{O}(n)$$

con las composiciones parciales heredadas de  $\mathcal{O}$ .

En el caso de un óperad simétrico (ver sección 1.3) se debe además tensorizar el espacio  $\Sigma^{n-1}\mathcal{O}(n)$  con la representación signo (ver definición [MSS02, 3.13], o el apartado [LV12, 7.2.2])

Teniendo en cuenta la identificación  $\Sigma\mathcal{E}nd(V) \simeq \mathcal{E}nd(\Sigma^{-1}V)$  (c.f. [MSS02, 3.16]) se tiene la siguiente relación entre álgebras sobre  $\mathcal{O}$  y  $\Sigma\mathcal{O}$ .

**Observación 1.11.** A partir de la suspensión, se tiene una relación 1-1 entre las estructuras de  $\mathcal{O}$ -álgebra en  $V$  y las estructuras de  $\Sigma\mathcal{O}$ -álgebras en  $\Sigma V$ .

Si  $\mathcal{O}$  está dado por generadores y relaciones sabemos que  $\Sigma\mathcal{O}$  tiene los mismos generadores pero subidos en grado (su aridad menos uno). A partir de la observación anterior se pueden calcular de manera sencilla las relaciones que definen  $\Sigma\mathcal{O}$ .

## Operads y árboles

Como se entrevé en la introducción de este capítulo, los operads pueden representarse de manera gráfica por medio de árboles cuyos vértices internos (ver definición abajo) codifican las operaciones y el árbol mismo de qué manera éstas se componen (es decir, de qué manera el resultado de una sirve como entrada en otra). De hecho, veremos que el operad libre en un conjunto de operaciones está dado por los árboles etiquetados por dicho conjunto. A continuación, daremos la definición de árbol que utilizaremos en el resto de la monografía.

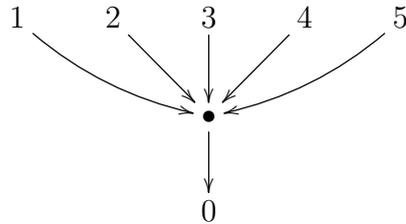
**Definición 1.12.** Un árbol *árbol (planar reducido con raíz) de  $n$  hojas  $T$*  consiste en un grafo grafo dirigido (i.e. conjunto simplicial 1-dimensional), contráctil y con las siguientes propiedades:

- Los vértices de valencia<sup>1</sup> 1 están etiquetados por  $0, 1, \dots, n$ . El vértice etiquetado por 0 corresponde a la *raíz* del árbol y el resto a las *hojas*. Llamaremos *internos* a los vértices que no son hojas ni la raíz. Notaremos por  $\text{in}(T)$  al conjunto de todos los vértices internos.
- El grafo está dirigido hacia la raíz. Es decir, desde cualquier vértice existe un (único) camino dirigido que termina en la raíz. Esto implica que, salvo la raíz, cada vértice tiene una sola arista saliente. La cantidad de aristas entrantes a un vértice  $v$  se llamará la *aridad* de dicho vértice y la notaremos como  $\text{ar}(v)$ . Los vértices de aridad 0 son exactamente las hojas. Por definición, la raíz debe tener aridad 1.
- No hay vértices internos con aridad 1, es decir, el árbol es *reducido*. Equivalentemente, no hay vértices de valencia 2 ya que esto sería tener una arista entrante y una saliente.
- Las hojas tienen un orden total, ya que se corresponden con el conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Al representar gráficamente un árbol en el plano, lo haremos de manera tal que este orden se lea en sentido horario.
- De manera análoga al punto anterior, se tiene un orden total en las aristas entrantes a un vértice  $v$ , lo que lo hace un árbol *planar*. Al representarlo gráficamente, se leerá en sentido horario.

---

<sup>1</sup>Cantidad de aristas que confluyen en el vértice, sean éstas entrantes o salientes.

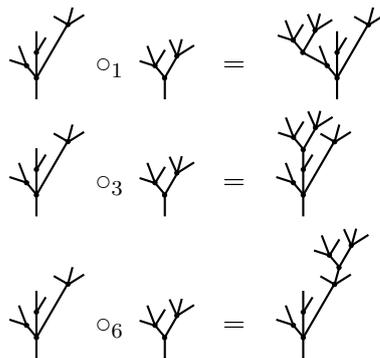
Como convención, pensaremos a las hojas numeradas de izquierda a derecha. Llamaremos  $n$ -corola al árbol de  $n$  hojas y un solo vértice interno. Un ejemplo de una corola de cinco entradas es:



Podemos omitir dibujar las flechas si consideramos un árbol siempre dirigido hacia abajo, es decir, la raíz es el vértice que está más abajo en el dibujo. Como puede verse, en este ejemplo las etiquetas están ordenadas en sentido horario desde la raíz (y por este motivo, las podemos omitir en el dibujo).

Definimos ahora  $\mathcal{T}$ , el *operad de árboles*. El mismo consiste en el operad (en conjuntos) cuyas operaciones son  $\mathcal{T}(n) = \{\text{árboles con } n \text{ hojas}\}$  y donde la composición parcial  $i$ -ésima consiste en pegar la raíz de un árbol a la  $i$ -ésima hoja del otro. Las hojas del árbol resultante se etiquetan con el orden descripto anteriormente.

Por ejemplo, para  $\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \in \mathcal{T}(7)$ ,  $\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \in \mathcal{T}(6)$ , resulta



La siguiente observación nos muestra una manera equivalente y más compacta de codificar un árbol (planar).

**Observación 1.13.** Un árbol  $T$  de  $n$  hojas consiste en un conjunto (que llamaremos también  $T$ ) de subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$  con las siguientes propiedades:

- Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , consideraremos que  $\{i\} \in T$  (que serán las  $n$  hojas).
- $\{1, \dots, n\} \in T$ . (O sea, el conjunto de todas las hojas siempre lo pensaremos como parte de  $T$ , ya que corresponde a la raíz.)
- Cada  $v \in T$  es una lista de números correlativos (es decir, existen  $i \leq j$  tales que  $v = \{i, \dots, j\}$ ).
- $v \cap v' \neq \emptyset \implies v \subset v' \text{ ó } v \supset v'$

El conjunto de vértices del árbol será  $T$  con una arista  $v \rightarrow v'$  si  $v \supset v'$  de manera inmediata, es decir  $v \supset w \supset v' \implies w = v \text{ ó } w = v'$ . Agregamos el vértice  $0$  y una arista  $\{1, \dots, n\} \rightarrow 0$ .

Los subconjuntos que definen el árbol pueden pensarse como una expresión con llaves en el conjunto  $1, \dots, n$ , por ejemplo

$$\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} = \{\{1, 2\}\{3, 4\}\{5, 6, 7\}\}$$

De esta manera, la composición parcial consiste en sustituir el  $i$ -ésimo elemento de una expresión por toda la otra expresión etiquetando nuevamente el resultado. Así, el ejemplo antes expuesto resulta:

$$\underbrace{\{\{1, 2\}\{3, 4\}\{5, 6, 7\}\}}_{\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array}} \circ_3 \underbrace{\{\{1, 2, 3\}\{4, 5, 6\}\}}_{\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array}} = \underbrace{\{\{1, 2\}\{\{3, 4, 5\}\{6, 7, 8\}\}9\}\{10, 11, 12\}}_{\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array}}$$

**Definición 1.14.** Para un conjunto graduado  $X = \{X_n\}_{n \geq 2}$  se define el *operad libre* (en la categoría de conjuntos) dado por  $X$  (que serán las operaciones) de la siguiente manera:

$$\mathcal{TX}(n) = \{\text{árboles con } n \text{ hojas etiquetados en } X\}$$

donde un árbol etiquetado en  $X$  consiste en un árbol con una asignación que le hace corresponder a cada vértice interno  $v$ , un elemento  $x_v \in X_{\text{ar}(v)}$ . Observar que el árbol con una sola hoja (y ningún vértice interno) se considera etiquetado. Más aún, resulta en la identidad del operad libre.

Llamaremos  $\mathfrak{r}$  a la  $n$ -corola etiquetada por un  $x \in X_n$ . Observar que  $\mathcal{TX}$  está generado como operad por las corolas  $\mathfrak{r}$  con  $x \in X$ , es decir, cualquier árbol en  $\mathcal{TX}$  se consigue de las  $\mathfrak{r}$  vía composiciones parciales.

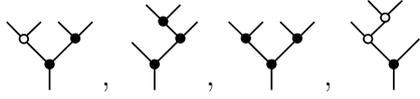
**Ejemplos 1.15.**

- Si se considera  $X_n = \{\bullet\} \forall n \geq 2$  se obtiene  $\mathcal{T}X = \mathcal{T}$
- Si se considera  $\hat{X}_2 = \{\bullet\}$  y  $\hat{X}_n = \emptyset$  si  $n \neq 2$  se tiene  $\mathcal{T}\hat{X} \hookrightarrow \mathcal{T}$  el suboperad formado por los árboles binarios. Por ejemplo

$$\mathcal{T}\hat{X}(2) = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \}$$

$$\mathcal{T}\hat{X}(3) = \left\{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right\}$$

- Si se considera  $\tilde{X}_2 = \{\bullet, \circ\}$  y  $\tilde{X}_n = \emptyset$  para  $n > 2$ ,  $\mathcal{T}\tilde{X}$  resulta el operad de árboles binarios con vértices internos decorados por  $\bullet$  y  $\circ$ .

Por ejemplo   $\in \mathcal{T}\tilde{X}(4)$ .

**Definición 1.16.** Dada una sucesión de  $dg$ -espacios vectoriales  $E = \{E_n\}_{n \geq 2}$  se define el  $dg$ -operad libre  $\mathcal{F}(E)$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}(E)(n) = \bigoplus_{T \in \mathcal{T}(n)} \bigotimes_{v \in \text{in}(T)} E_{\text{ar}(v)}$$

Éstos son  $dg$ -espacios vectoriales, con el diferencial y el grado extendido naturalmente al producto tensorial, esto es:

$$d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes dy$$

$$|x \otimes y| = |x| + |y|$$

Las composiciones parciales están dadas por el pegado de árboles. Esto es, en los sumandos dados por árboles  $T_1, T_2$  de  $n$  y  $m$  hojas respectivamente se define en esa componente la composición parcial vía la identificación:

$$\left( \bigotimes_{v \in \text{in}(T_1)} E_{\text{ar}(v)} \right) \otimes \left( \bigotimes_{v \in \text{in}(T_2)} E_{\text{ar}(v)} \right) \xrightarrow{\iota} \bigotimes_{v \in \text{in}(T_1 \circ_i T_2)} E_{\text{ar}(v)}$$

$$x \otimes y \mapsto \iota(x \otimes y) =: x \circ_i y$$

Por ejemplo, si  $T_1 = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array}$ ,  $x = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4 \in E_3 \otimes E_2 \otimes E_2 \otimes E_3$  y  $T_2 = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array}$ ,  $y = y_1 \otimes y_2 \otimes y_3 \in E_2 \otimes E_3 \otimes E_3$  se tiene

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} \text{Árbol con 4 hojas} \\ , x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4 \end{array} \right) \circ_3 \left( \begin{array}{c} \text{Árbol con 3 hojas} \\ , y_1 \otimes y_2 \otimes y_3 \end{array} \right) = \\ & = \left( \begin{array}{c} \text{Árbol con 7 hojas} \\ , x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes y_3 \otimes x_4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Si se elige una base para los espacios  $E_n$ , la descripción de  $\mathcal{F}(E)$  puede simplificarse como se muestra en la siguiente observación.

**Observación 1.17.** Si  $E_n = \langle X_n \rangle$  el espacio vectorial con base  $X_n$  y lo consideramos como  $dg$ -espacio con diferencial trivial, se tiene

$$\mathcal{F}(E)(n) = \langle \mathcal{T}X(n) \rangle$$

Es decir,  $\mathcal{F}(E)$  está generado (en cada aridad) como espacio vectorial por los árboles etiquetados en los generadores de  $X$ . Más aún, las composiciones parciales en  $\mathcal{F}(E)$  corresponden a extender linealmente las de  $\mathcal{T}X$ .

Volviendo al ejemplo anterior,

- Si se considera  $X_n = \{\bullet\} \forall n \geq 2$  se tiene, entonces,  $E_n = \langle \bullet \rangle$ . Luego

$$\mathcal{F}(E)(n) = \langle \mathcal{T}(n) \rangle$$

O sea, las operaciones  $n$ -arias consisten en combinaciones lineales de árboles de  $n$ -hojas.

- Si se considera  $\hat{X}_2 = \{\bullet\}$  y  $\hat{X}_n = \emptyset$  si  $n \neq 2$  se obtiene  $\hat{E}_2 = \langle \bullet \rangle$  (y  $\hat{E}_n = 0$  si  $n \neq 2$ ). Por lo tanto,

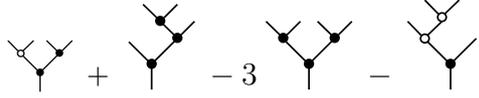
$$\mathcal{F}(\hat{E})(n) = \langle T \in \mathcal{T}(n) : T \text{ binario} \rangle$$

En otras palabras, las operaciones  $n$ -arias están generadas por los árboles binarios de  $n$ -hojas. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\hat{E}(2) &= \langle \text{Árbol binario de 2 hojas} \rangle \\ \mathcal{F}\hat{E}(3) &= \langle \text{Árbol binario de 3 hojas (izquierda)}, \text{Árbol binario de 3 hojas (derecha)} \rangle \end{aligned}$$

- Al considerar  $\tilde{X}_2 = \{\bullet, \circ\}$  y  $\tilde{X}_n = \emptyset$  para  $n > 2$ , se tiene

$$\mathcal{F}\tilde{E}(n) = \langle \mathcal{T}\tilde{X}(n) \rangle$$

Así, por ejemplo,   $\in \mathcal{F}\tilde{E}(4)$ .

Pasemos ahora a la definición de algunos conceptos algebraicos básicos de la teoría de operads que necesitaremos en la siguiente sección.

**Definición 1.18.** Sea  $\mathcal{O}$  un  $dg$ -operad. Un ideal de  $\mathcal{O}$  consiste en una colección de subespacios

$$\mathcal{I}(n) \subset \mathcal{O}(n)$$

tal que  $\mu \in \mathcal{I}$  ó  $\nu \in \mathcal{I}$  implica  $\mu \circ_i \nu \in \mathcal{I}$ .

Se puede definir entonces el operad cociente

$$(\mathcal{O}/\mathcal{I})(n) = \frac{\mathcal{O}(n)}{\mathcal{I}(n)}$$

con composiciones parciales  $\bar{\mu} \circ_i \bar{\nu} := \overline{\mu \circ_i \nu}$ .

Dado un subconjunto  $R$  de  $\mathcal{O}$  (más precisamente,  $R(n) \subset \mathcal{O}(n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ ), se define el *ideal generado por  $R$*  al menor ideal que contiene a  $R$ , esto es, la intersección de todos los ideales que contienen a  $R$ .

**Ejemplos 1.19.**

- Consideremos el operad libre en una colección  $\{X_n\}_{n \geq 2}$  y  $E_n = \langle X_n \rangle$  como en la observación anterior. Sea  $Y$  una subcolección, esto es,  $Y_n \subset X_n$  para todo  $n \geq 2$  (podría ser  $Y_n = \emptyset$ ). Se tiene el ideal  $\mathcal{I}$  generado (como espacio vectorial) en aridad  $n$  por los árboles etiquetados que tienen algún vértice con etiqueta en  $Y$ .

$$\mathcal{I}(n) = \langle \{T \in \mathcal{T}X(n) : \text{algún vértice está etiquetado por } Y\} \rangle$$

Al considerar el cociente, se obtiene

$$\frac{\mathcal{F}(E)}{\mathcal{I}} \simeq \mathcal{F}(E')$$

donde  $E'_n = \langle X_n \rangle / \langle Y_n \rangle \simeq \langle X_n \setminus Y_n \rangle$ .

- Veamos ahora otra descripción del operad  $\mathcal{A}$ . Consideremos el operad libre para  $X_2 = \{\bullet\}$ , esto es, libre en  $E_2 = \langle \bullet \rangle, E_n = 0 \forall n \neq 2$ .

Recordemos que en este caso  $\mathcal{F}(E)(n) = \langle T \in \mathcal{T}(n) : T \text{ binario} \rangle$

Consideramos entonces  $\mathcal{I}$  el ideal generado por el elemento

$$a := \begin{array}{|c|} \hline \sqcup \\ \hline \end{array} \circ_1 \begin{array}{|c|} \hline \sqcup \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \sqcup \\ \hline \end{array} \circ_2 \begin{array}{|c|} \hline \sqcup \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \sqcup \\ \hline \sqcup \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \sqcup \\ \hline \sqcup \\ \hline \end{array} \in \mathcal{F}(E)(3)$$

Se tiene entonces

$$\frac{\mathcal{F}(E)}{\mathcal{I}} \simeq \mathcal{A}$$

ya que  $\mathcal{F}(E)(n)$  es el espacio vectorial generado por los árboles binarios y en el cociente todos resultan identificados. Más precisamente, al considerar el morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E)(n) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A}(n) \\ T & \mapsto & m_n \end{array}$$

se tiene  $\mathcal{I} = \text{Ker}\varphi$ . Veamos esto. Como  $a \in \text{Ker}\varphi$  y éste es un ideal, se tiene  $\mathcal{I} \subset \text{Ker}\varphi$ . Recíprocamente, se puede ver inductivamente (para  $n \geq 2$ ) que  $\dim(\mathcal{I}(n)) = 2^{n-1} - 1$  y, dado que  $\dim(\mathcal{F}(E)(n)) = 2^{n-1}$ , se sigue la igualdad.

**Proposición 1.20.** *Sea  $\mathcal{O}$  un dg-operad, su homología*

$$H\mathcal{O}(n) := \frac{\text{Ker}(\mathcal{O}(n) \xrightarrow{d} \mathcal{O}(n))}{\text{Im}(\mathcal{O}(n) \xrightarrow{d} \mathcal{O}(n))}$$

*hereda una estructura de dg-operad (con diferencial trivial).*

*Demostración.* El resultado se desprende de las siguientes dos propiedades

- $\mathcal{Ker}(n) = \text{Ker}(\mathcal{O}(n) \xrightarrow{d} \mathcal{O}(n))$  es un suboperad de  $\mathcal{O}$  (y  $d|_{\mathcal{Ker}} = 0$ ).
- $\mathcal{Im}(n) = \text{Im}(\mathcal{O}(n) \xrightarrow{d} \mathcal{O}(n))$  es un ideal de  $\mathcal{Ker}$ .

Sean  $\mu, \nu \in \mathcal{Ker}$ , se tiene

$$d(\mu \circ_i \nu) = d\mu \circ_i \nu + (-1)^{|\mu|} \mu \circ_i d\nu = 0.$$

Por lo tanto,  $\mu \circ_i \nu \in \mathcal{Ker}$  como se quería ver.

Ahora, sea  $\mu \in \mathcal{Im}$ , esto es,  $\exists \xi : d\xi = \mu$ . Luego, para  $\nu \in \mathcal{Ker}$ , se tiene

$$d(\xi \circ_i \nu) = \mu \circ_i \nu + (-1)^{|\xi|} \xi \circ_i d\nu = \mu \circ_i \nu.$$

Luego,  $\mu \circ_i \nu \in \mathcal{Im}$ . Análogamente, se ve que  $\nu' \circ_j \mu \in \mathcal{Im}$  para  $\nu' \in \mathcal{Im}$ .  $\square$

**Definición 1.21.** Un morfismo de  $dg$ -operads  $\phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}$  se dice una *equivalencia débil* o un *cuasi isomorfismo* si cada  $\phi_n : \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n)$  es una equivalencia débil de  $dg$ -espacios vectoriales (complejos de cadenas). Esto es equivalente a que el morfismo inducido  $\bar{\phi} : H\mathcal{O} \rightarrow H\mathcal{P}$  sea un isomorfismo.

## 1.2. Álgebras a menos de homotopía

En esta sección presentaremos el concepto de álgebra a menos de homotopía. Esto consiste en dar, para un  $dg$ -operad  $\mathcal{O}$ , un operad  $\mathcal{O}_\infty$  donde las relaciones de las operaciones originales de  $\mathcal{O}$  han sido relajadas (se satisfacen a menos de homotopía). Esta idea se formaliza considerando una resolución minimal de  $\mathcal{O}$  (un operad libre a menos de un diferencial (descomponible) [MSS02, II.3.10] que sea débil equivalente al operad de partida).

En el caso de operads cuadráticos, un candidato a resolución minimal es  $\mathcal{O}_\infty = \Omega(\mathcal{O}^!)$ , la construcción cobar en el dual Koszul de  $\mathcal{O}$ . Debido a que sólo utilizaremos este concepto aplicado a los operads  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{(2)}$ , nos permitiremos simplificar estas construcciones. La simplificación para estos casos particulares es notoria, ya que se trata operads cuadráticos generados por un conjunto finito de operaciones binarias que, además, resultan la linearización de un operad de conjuntos (es decir, las relaciones que lo definen pueden escribirse como igualdades). En ambos casos, sendas contrucciones dan lugar a resoluciones minimales como se buscaba. Esto puede verse a partir del método de reescritura [LV12, 8.1]

Aclaración: El material de esta sección no es requerido, en un sentido formal, para el desarrollo del resto de la tesis. Es incluido aquí con la intención de contextualizar los objetos utilizados. A los efectos de autocontención del manuscrito, puede pensarse los ejemplos 1.31 y 1.32 como definiciones de los operads  $\mathcal{A}_\infty$  y  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  respectivamente. A partir de esto, se puede verificar de manera directa (y elemental) que los morfismos

$$\mathcal{A}_\infty \rightarrow \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_\infty^{(2)} \rightarrow \mathcal{A}^{(2)}$$

son equivalencias débiles y que los operads así definidos son resoluciones minimales. Aún así, ante la ausencia de tal verificación, sólo serán utilizados los objetos  $\mathcal{A}_\infty$  y  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  en sí mismos. Es decir, los resultados del capítulo 3 no requieren de la teoría de operads aquí expuesta, verbigracia, teoría homotópica (y resoluciones minimales), (operads cuadráticos y) teoría de Koszul y construcción cobar.

## Operads cuadráticos

Un operad cuadrático es un operad dado por generadores binarios y relaciones cuadráticas en los generadores. Pensando el operad libre como árboles etiquetados en los generadores, esto quiere decir que se consideran generadores de aridad dos sujetos a relaciones dadas por (combinaciones lineales de) árboles de altura dos (o sea, con dos vértices internos). Como mencionamos anteriormente, nos restringiremos a operads de presentación finita. Muchos operads se pueden presentar de esta manera. En el contexto no simétrico, el operad  $\mathcal{A}$  que codifica álgebras asociativas es el ejemplo emblemático. También el operad  $\mathcal{A}^{(2)}$ , que definiremos más adelante, es de este tipo.

**Definición 1.22.** Un operad cuadrático (de presentación finita) es un operad definido por un conjunto finito de generadores binarios y relaciones cuadráticas entre ellos. Más precisamente, se trata del cociente del operad libre en un conjunto de generadores  $X = X_2$  (o sea,  $X_n = \emptyset$  si  $n \neq 2$ ) por un ideal  $\mathcal{I}(R)$  generado por relaciones  $R$  de la forma:

$$R \subset \mathcal{F}\langle X \rangle(3) = \langle \mathcal{T}X(3) \rangle$$

En aridad 3 dicho operad libre consiste en todos los árboles binarios etiquetados en  $X_2$  (ya que  $X$  sólo tiene generadores de aridad 2). Es decir,

$$R \subset \langle \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad y \end{array}, \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \quad \searrow \\ y \quad x \end{array} \rangle_{x,y \in X}$$

El  $dg$ -operad cuadrático dado por  $X$  y  $R$  es entonces

$$\mathcal{O}(X, R) = \frac{\mathcal{F}\langle X \rangle}{\mathcal{I}(R)}$$

donce  $\mathcal{I}(R)$  es el ideal generado por  $R$ .

**Ejemplo 1.23.** Como vimos en 1.19,  $\mathcal{A} = \mathcal{O}(X, R)$  para  $X = \{m_2\}$  y

$$R = \langle m_2 \circ_1 m_2 - m_2 \circ_2 m_2 \rangle$$

A modo de ejemplo de operad cuadrático, introduciremos aquí el operad  $\mathcal{A}^{(2)}$ , uno de los operads que utilizaremos en el capítulo 3. Al contrario de lo hecho con el operad  $\mathcal{A}$ , lo presentaremos primero como óperad cuadrático para luego dar una descripción de las operaciones en cada aridad (y las composiciones parciales). El operad  $\mathcal{A}^{(2)}$  modela álgebras con dos operaciones asociativas que además asocian entre ellas de una manera particular. Esto es, dos operaciones  $\square$  y  $\blacksquare$  tales que:

$$(\square) \square = \square(\square), \quad (\blacksquare) \blacksquare = \blacksquare(\blacksquare), \quad (\blacksquare) \square = \blacksquare(\square), \quad (\square) \blacksquare = \square(\blacksquare)$$

O, si pensamos a las operaciones  $\square$  y  $\blacksquare$  como corolas  $\begin{array}{c} \square \\ | \\ \square \end{array}$  y  $\begin{array}{c} \blacksquare \\ | \\ \blacksquare \end{array}$ ,

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} \square \\ | \\ \square \end{array}, \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} = \begin{array}{c} \blacksquare \\ | \\ \blacksquare \end{array}, \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} \square \\ | \\ \blacksquare \end{array}, \quad \begin{array}{c} \square \\ \blacksquare \end{array} = \begin{array}{c} \blacksquare \\ | \\ \square \end{array},$$

**Definición 1.24.** [Zin10, ZBG12] Definimos el operad  $\mathcal{A}^{(2)}$  como  $\mathcal{O}(X, R)$  para  $X = \{m_\square, m_\blacksquare\}$  y

$$R = \langle m_\blacksquare \circ_1 m_\blacksquare - m_\blacksquare \circ_2 m_\blacksquare, m_\square \circ_1 m_\blacksquare - m_\square \circ_2 m_\blacksquare, \\ m_\blacksquare \circ_1 m_\square - m_\blacksquare \circ_2 m_\square, m_\square \circ_1 m_\square - m_\square \circ_2 m_\square \rangle$$

Ahora, análogamente a lo hecho con  $\mathcal{A}$ , podríamos también presentar el operad  $\mathcal{A}^{(2)}$  como generado (como  $dg$ -espacio) en cada aridad por un  $m_\xi$  con  $\xi \in \{\blacksquare, \square\}^{n-1}$  (en este caso diremos  $|\xi| = n$ ).

Es decir, se tiene:

$$\mathcal{A}^{(2)}(n) = \langle m_\xi \rangle_{\xi \in \{\blacksquare, \square\}^{n-1}}$$

donde tanto el diferencial como la graduación son triviales y las composiciones parciales están definidas de la siguiente manera:

$$m_{\xi'} \circ_i m_{\xi''} = m_{(\xi'_1, \dots, \xi'_{i-1}, \xi''_1, \dots, \xi''_{q-1}, \xi'_i, \dots, \xi'_{p-1})}$$

para  $|\xi'| = p$ ,  $|\xi''| = q$  e  $i : 1 \leq i \leq p$ .

Por ejemplo,

$$m_{\blacksquare \square \square} \circ_4 m_{\blacksquare} = m_{\blacksquare \square \square (\blacksquare \square)}$$

donde el paréntesis está sólo para enfatizar la operación realizada.

En otras palabras, la composición  $i$ -ésima de un generador en aridad  $p$  y uno en aridad  $q$  resulta en el generador etiquetado con los primeros  $i - 1$  valores de la primera etiqueta, seguido de los valores de la segunda y completando con los restantes valores de la primera.

Otro ejemplo similar de operad cuadrático es el operad  $\mathcal{A}^{(2)}$  [Zin10, Dot09] que las describe álgebras *compatibles*: espacios con dos productos asociativos tales que la suma también es asociativa (o, equivalentemente, dos productos tales que cualquier combinación lineal de ellos es asociativa).

**Ejemplo 1.25.** Se define  $\mathcal{A}^{(2)} = \mathcal{O}(X, R)$  con  $X = \{m_\square, m_\blacksquare\}$  y

$$R = \langle m_\blacksquare \circ_1 m_\blacksquare - m_\blacksquare \circ_2 m_\blacksquare, m_\square \circ_1 m_\square - m_\square \circ_2 m_\square, \\ m_\square \circ_1 m_\blacksquare + m_\blacksquare \circ_1 m_\square - m_\square \circ_2 m_\blacksquare - m_\blacksquare \circ_2 m_\square \rangle$$

El hecho de que  $m_{\square} + m_{\blacksquare}$  sea una operación asociativa quiere decir que existe un morfismo de operads:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}^{\langle 2 \rangle} \\ m_2 &\mapsto m_{\square} + m_{\blacksquare} \end{aligned}$$

Además, como  $R_{\mathcal{A}^{\langle 2 \rangle}} \subset R_{\mathcal{A}^{(2)}}$ , se tiene un morfismo natural:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\langle 2 \rangle} &\rightarrow \mathcal{A}^{(2)} \\ m_{\square} &\mapsto m_{\square} \\ m_{\blacksquare} &\mapsto m_{\blacksquare} \end{aligned}$$

Componiendo ambos morfismos, se tiene un morfismo de operads:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}^{(2)} \\ m_2 &\mapsto m_{\square} + m_{\blacksquare} \end{aligned}$$

además de los morfismos obvios

$$\begin{array}{cc} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{(2)} & \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{(2)} \\ m_2 \mapsto m_{\square} & m_2 \mapsto m_{\blacksquare} \end{array}$$

Por otra parte, un ejemplo trivial de  $\mathcal{A}^{(2)}$ -álgebra se obtiene a partir de una  $\mathcal{A}$ -álgebra poniendo  $m_{\square} = m_{\blacksquare} = m_2$ . En otras palabras, se tiene un morfismo de operads  $\mathcal{A}^{(2)} \xrightarrow{p} \mathcal{A}$  dado por  $p(m_{\square}) = p(m_{\blacksquare}) = m_2$ .

## El $\mathcal{O}_{\infty}$ de un operad cuadrático $\mathcal{O}$

Dado un operad  $\mathcal{O}$ , se busca un operad  $\mathcal{O}_{\infty}$  que sea una resolución minimal. Esto es, un operad libre a menos de un diferencial (descomponible) [MSS02, II.3.10] tal que se tenga una equivalencia débil  $\mathcal{O}_{\infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$ . En el caso de los operads cuadráticos, se tiene un candidato:  $\mathcal{O}_{\infty} = \Omega\mathcal{O}^!$  [LV12, 10.1], la construcción cobar en su dual Koszul. Nos interesan las resoluciones de los operads  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{(2)}$ , para los cuales este candidato funciona. Nuevamente, el ejemplo emblemático (y el origen del concepto [Sta63]) es el de operad  $\mathcal{A}$ , que axiomatiza las álgebras asociativas. Recordemos que el mismo está dado por una operación asociativa  $m_2$ . En cada aridad hay una operación  $m_n$  que

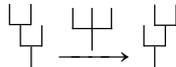
consiste en multiplicar los elementos para cualquier posición de paréntesis.

El operad  $\mathcal{A}_\infty$ , que describe álgebras asociativas a menos de homotopía, estará dado por una operación binaria  $\mathbf{m}_2$  que no es asociativa. Sin embargo, la falla de la asociatividad es corregida por una operación ternaria. Esto es, hay una operación ternaria  $\mathbf{m}_3$  tal que:

$$\partial \mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_2 \circ_1 \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_2 \circ_2 \mathbf{m}_2$$

Topológicamente, esto se puede pensar como una 1-celda cuyo borde son las dos 0-celdas:

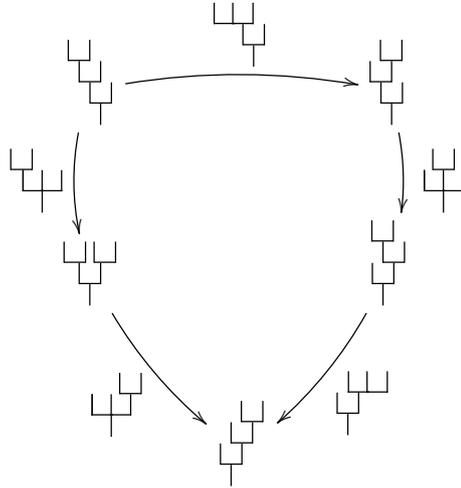
$$\mathbf{m}_2 \circ_2 \mathbf{m}_2 \xrightarrow{\mathbf{m}_3} \mathbf{m}_2 \circ_1 \mathbf{m}_2$$

O bien,  si representamos  $\mathbf{m}_2 = \begin{array}{c} \sqcup \\ \vdots \end{array}$  y  $\mathbf{m}_3 = \begin{array}{c} \sqcup \sqcup \\ \vdots \end{array}$ .

Ahora bien, en el caso de un álgebra no asociativa, a partir de la operación binaria pueden definirse cinco operaciones cuaternarias. Las mismas consisten en, dados cuatro elementos, multiplicarlos asociando de todas las maneras posibles. Es decir, todas las maneras de poner paréntesis a la expresión  $abcd$  para  $a, b, c, d$  elementos del álgebra. Por supuesto, en un álgebra asociativa estas operaciones coinciden. De manera gráfica, lo podemos representar como todos los árboles binarios posibles con cuatro hojas:

$((ab)c)d$	$(a(bc))d$	$(ab)(cd)$	$a((bc)d)$	$a(b(cd))$
				

En un álgebra asociativa a menos de homotopía, usando que  vemos que dichas operaciones se relacionan unas con otras mediante:



No es necesario que los dos caminos coincidan, pero sí deben hacerlo a menos de homotopía. Es decir, la falla de que ambos caminos coincidan es corregida por una operación  $\mathfrak{m}_4$ :

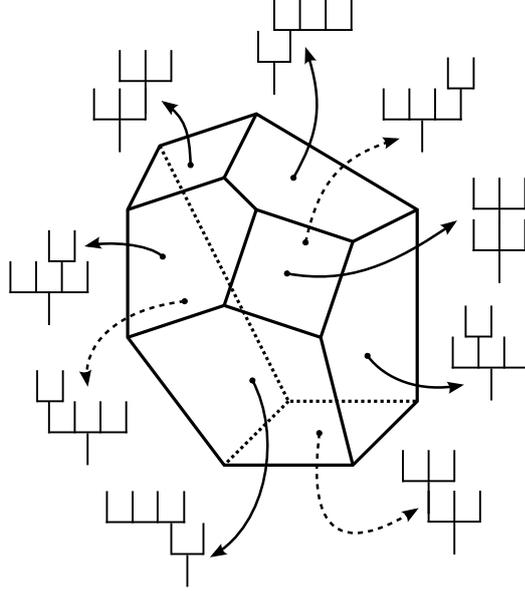
$$\partial \mathfrak{m}_4 = \mathfrak{m}_2 \circ_1 \mathfrak{m}_3 + \mathfrak{m}_3 \circ_2 \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_2 \circ_2 \mathfrak{m}_3 - \mathfrak{m}_3 \circ_3 \mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_3 \circ_1 \mathfrak{m}_2$$

Es importante notar cómo la ecuación algebraica tiene su interpretación geométrica dada por la orientación y disposición de las 1-celdas en el pentágono. Veamos un ejemplo más antes de dar la ecuación general.

En aridad  $n = 5$ , a partir de la operación binaria pueden formarse 14 operaciones 5-arias, correspondientes a los 14 árboles binarios con 5 hojas. Es decir, uno por cada manera de poner paréntesis en una expresión de 5 elementos.

Utilizando la relación  $\begin{array}{c} \sqcup \\ | \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \sqcup \sqcup \\ | \end{array}$ , se pueden conectar entre ellas. Es decir, se pueden armar 21 1-celdas correspondientes a combinar dos  $m_2$  y una  $m_3$ .

A su vez, estas 1-celdas se relacionan entre sí vía  $m_2 \circ_{1,2} m_4$ ,  $m_3 \circ_{1,2,3} m_3$  y  $m_4 \circ_{1,2,3,4} m_2$ . Geométricamente, podemos organizar esta información utilizando un poliedro como en la siguiente figura.



En un álgebra asociativa a menos de homotopía se pide entonces que exista un  $\mathfrak{m}_5$  tal que:

$$\partial \mathfrak{m}_5 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p+q=6} (-1)^{(i-1)+(p-i)q} \mathfrak{m}_p \circ_i \mathfrak{m}_q$$

Al continuar aumentando la aridad puede verse que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene un *polítopo de Stasheff* [Sta63, BV73] que diagramáticamente describe la ecuación:

$$\partial \mathfrak{m}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p+q=n+1} (-1)^{(i-1)+(p-i)q} \mathfrak{m}_p \circ_i \mathfrak{m}_q$$

**Definición 1.26.** Dado  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X, R)$  un operad cuadrático, se define su operad dual Koszul [LV12, 7.7.1] como  $\mathcal{O}^! = \mathcal{O}(X^*, R^\perp)$ . Más precisamente, identificando  $\langle X \rangle \simeq \langle X \rangle^*$ ,  $R^\perp$  es el espacio ortogonal a  $R$  en

$$\mathcal{F}\langle X \rangle(3) = \langle \begin{array}{c} \forall \\ \times \\ \bigvee \end{array} \rangle_{x,y \in X} \oplus \langle \begin{array}{c} \bigvee \\ \times \\ \forall \end{array} \rangle_{x,y \in X}$$

respecto a la matriz  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ .

Por ejemplo, si  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X, R = 0) = F\langle X \rangle$  entonces  $\mathcal{O}^! = \mathcal{O}(X, R = \mathcal{F}\langle X \rangle(3))$  y viceversa.

**Ejemplos 1.27.**  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}^!$  [LV12] y  $\mathcal{A}^{(2)} \simeq (\mathcal{A}^{(2)})^!$  [ZBG12].

*Demostración.* Incluimos aquí la demostración de este hecho para ilustrar la definición anterior. En ambos casos se demuestra por medio de sendos cálculos directos a partir de la misma.

En el primer caso, recordemos que  $\mathcal{A} = \mathcal{O}(X, R)$  para  $X = \{m_2\}$

$$R = \langle \overbrace{m_2 \circ_1 m_2}^{v_1} - \overbrace{m_2 \circ_2 m_2}^{v_2} \rangle$$

Calculemos entonces  $R^\perp$  en el espacio  $\mathcal{A}(3) = \langle v_1, v_2 \rangle$ . Las coordenadas del generador de  $R$  en la base  $\{v_1, v_2\}$  son  $(1, -1)$  y la matriz del producto interno es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Dado que  $(1 \ -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ , deducimos  $R^\perp = R$ .

El segundo caso es completamente análogo. Recordemos que  $\mathcal{A}^{(2)} = \mathcal{O}(X, R)$  para  $X = \{m_\square, m_\bullet\}$  y  $R$

$$R = \langle m_\bullet \circ_1 m_\bullet - m_\bullet \circ_2 m_\bullet, m_\square \circ_1 m_\bullet - m_\square \circ_2 m_\bullet, \\ m_\bullet \circ_1 m_\square - m_\bullet \circ_2 m_\square, m_\square \circ_1 m_\square - m_\square \circ_2 m_\square \rangle$$

Llamemos

$$v_1^{\bullet\bullet} := m_\bullet \circ_1 m_\bullet \quad v_1^{\square\square} := m_\square \circ_1 m_\square \quad v_1^{\bullet\square} := m_\bullet \circ_1 m_\square \quad v_1^{\square\bullet} := m_\square \circ_1 m_\bullet$$

$$v_2^{\bullet\bullet} := m_\bullet \circ_2 m_\bullet \quad v_2^{\square\square} := m_\square \circ_2 m_\square \quad v_2^{\bullet\square} := m_\bullet \circ_2 m_\square \quad v_2^{\square\bullet} := m_\square \circ_2 m_\bullet$$

Consideramos la base  $\{v_1^{\bullet\bullet}, v_1^{\square\square}, v_1^{\bullet\square}, v_1^{\square\bullet}, v_2^{\bullet\bullet}, v_2^{\square\square}, v_2^{\bullet\square}, v_2^{\square\bullet}\}$ . Las relaciones se escriben de manera simple en esta base, ya que

$$R = \langle v_1^{\bullet\bullet} - v_2^{\bullet\bullet}, v_1^{\square\square} - v_2^{\square\square}, v_1^{\bullet\square} - v_2^{\bullet\square}, v_1^{\square\bullet} - v_2^{\square\bullet} \rangle$$

De esta manera, resulta evidente que cada generador de  $R$  es ortogonal a sí mismo (respecto a la matriz  $\begin{pmatrix} I_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & -I_{4 \times 4} \end{pmatrix}$ ) y, como en el caso anterior, se tiene  $R^\perp = R$ .  $\square$

Como ejemplo, podemos mencionar también que el dual Koszul del operad  $\mathcal{A}^{(2)}$  es el operad que describe las álgebras *totalmente compatibles* [Zin10].

**Ejemplo 1.28.** El dual Koszul del operad  $\mathcal{A}^{(2)}$  es el operad [Zin10, Dot09]  $(\mathcal{A}^{(2)})^! = \mathcal{O}(X, R)$  para  $X = \{m_\square, m_\bullet\}$  y relaciones

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \vdots \end{array}, \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \vdots \end{array}, \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} \square \\ \bullet \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} \square \\ \bullet \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ \vdots \end{array}$$

Para un  $dg$ -operad cuadrático  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X, R)$ , consideremos el operad  $\Omega\mathcal{O}^\dagger$ , donde  $\Omega$  es la construcción cobar (ver [GK94][3.2] y [LV12][6.5]).

De esta manera, el operad  $\Omega\mathcal{O}^\dagger$  está generado de manera libre por las operaciones de  $\mathcal{O}^\dagger$  y el diferencial bar desarma un generador en la suma de todas las posibles maneras de obtenerlo como composición de dos operaciones en  $\mathcal{O}^\dagger$ .

Observemos que se tiene un morfismo natural

$$\Omega\mathcal{O}^\dagger \rightarrow \mathcal{O}$$

definido por  $\mathfrak{x} \mapsto x$  para  $x \in X_2$ .

Este morfismo inducido en homología es siempre un isomorfismo en grado cero,  $H_0\mathcal{O}_\infty \xrightarrow{\cong} H_0\mathcal{O}$ . Esto se debe en primer lugar a que la componente en grado cero de  $\mathcal{O}_\infty(n)$  consiste en los árboles binarios de  $n$  hojas etiquetados en operaciones binarias de  $\mathcal{O}(X, R^\perp)$  que resultan, precisamente, el conjunto  $X$ . Por otra parte, en grado uno se tienen los árboles (de  $n$  hojas) que tienen exactamente un vértice con aridad tres y el resto de aridad dos etiquetados en una operación ternaria y el resto binarias de  $\mathcal{O}(X, R^\perp)$  respectivamente. Una operación ternaria en  $\mathcal{O}(X, R^\perp)$  consiste en la clase de equivalencia (dada por la relación  $R^\perp$ ) de un árbol binario etiquetado en  $X$ . Se puede verificar de manera directa que la imagen por el diferencial cobar de las corolas etiquetadas de tres hojas consiste en  $R$  mirada dentro de la componente cero del operad  $\mathcal{O}_\infty$ . De esta manera, la imagen de la componente de grado uno es  $\langle R \rangle$  mirada dentro  $\mathcal{O}_\infty$  y por lo tanto el morfismo mencionado induce es un isomorfismo en la homología de grado cero.

**Definición 1.29.** Un operad se dice *Koszul* si el morfismo natural  $\Omega\mathcal{O}^\dagger \rightarrow \mathcal{O}$  es una equivalencia débil. En este caso, consideraremos  $\mathcal{O}_\infty := \Omega\mathcal{O}^\dagger$ .

Más adelante, en la proposición 1.36, veremos que los operads  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{(2)}$  son Koszul.

A continuación veremos qué se obtiene por medio de esta construcción en el caso de los operads  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{(2)}$ . Es decir, explicitaremos los operads  $\mathcal{A}_\infty$  y  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$ . Estos operads serán necesarios en el capítulo 3. Por otra parte, son los únicos operads “a menos de homotopía” que juegan un papel importante en esta tesis. Es por eso que hemos decidido mantener las construcciones involucradas lo más sencillas posibles.

Notar que en ambos ejemplos, son autoduales Koszul 1.27 y por lo tanto será  $\mathcal{A}_\infty = \Omega\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}_\infty^{(2)} = \Omega\mathcal{A}^{(2)}$ .

La siguiente observación muestra de qué manera se simplifica el cálculo de la construcción  $\text{cobar}$  en el caso de los operads  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{(2)}$ . Esto se debe a que éstos son linealizaciones de operads de conjuntos finitos en cada aridad. Por lo tanto, por una parte, los espacios de operaciones son de dimensión finita y triviales como  $dg$ -espacios. Mientras, por otra parte, las composiciones parciales son particularmente sencillas. A los efectos de autocontención de la tesis, se puede pensar la observación como una definición.

**Observación 1.30.** Sea  $\mathcal{O}$  un operad de conjuntos finito en cada aridad y notemos por  $\hat{\mathcal{O}}$  a su linealización. La construcción  $\text{cobar}$  (ver [GK94, 3.2] y [LV12, 6.5]) en  $\hat{\mathcal{O}}$ , resulta considerar el operad libre en  $\mathcal{O}$

$$\Omega\hat{\mathcal{O}} = \langle \mathcal{TO} \rangle$$

con la siguiente estructura de operad diferencial graduado.

- Si  $a \in \mathcal{TO}$  su grado<sup>2</sup> es:

$$|a|_B = n - \#(\text{aristas internas de } T) - 2$$

Así, por ejemplo, las corolas tienen grado  $n - 2$  y los árboles de grado cero son exactamente los binarios.

- El diferencial  $\text{bar}$  definido para un  $x \in \mathcal{O}(n)$  por

$$d_B(\mathfrak{x}) = \sum_{x=y \circ_i^{\mathcal{O}} z} (-1)^{(i-1)+(p-i)q} \eta \circ_i^{\mathcal{TO}} \mathfrak{z}$$

donde  $p, q$  son tales que  $n = p + q - 1$  y la suma es sobre todas las maneras de conseguir  $x \in \mathcal{O}(n)$  como composición de  $y \in \mathcal{O}(p), z \in \mathcal{O}(q)$ .

Recordemos que  $\mathfrak{x}, \eta, \mathfrak{z}$  denotan las corolas etiquetadas por  $x, y, z$  respectivamente. Como  $\mathcal{TO}$  está generado como operad por las corolas, el diferencial queda definido extendiendo por composición y linealmente.

---

<sup>2</sup>En general, se considera la suspensión del operad  $\hat{\mathcal{O}}$ . Como en el caso particular que estamos considerando el operad  $\mathcal{O}$  tiene graduación trivial, preferimos directamente explicitar los grados de las operaciones.

**Ejemplo 1.31.** Explicitemos el operad  $\mathcal{A}_\infty := \Omega(\mathcal{A}^!) = \Omega(\mathcal{A})$ . Recordemos

$$\mathcal{A}(1) = \langle 1 \rangle, \text{ y para } n \geq 2, \mathcal{A}(n) = \langle m_n \rangle$$

Es decir, está generado (linealmente) por una sola operación en cada aridad. Por lo tanto al considerar la colección  $X = \{X_n\}_{n \geq 2}$  formada por los generadores (es decir  $X_n = \{m_n\}$ ) se tiene,

$$\Omega(\mathcal{A})(n) = \langle \mathcal{T}X(n) \rangle$$

El diferencial *bar*, queda definida por su valor en las corolas  $\mu \cdots \overset{n}{\mu} \cdots \mu$ :

$$d_B(\mu \cdots \overset{n}{\mu} \cdots \mu) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p+q=n+1} (-1)^{(i-1)+(p-i)q} \begin{array}{c} \mu \overset{q}{\mu} \mu \\ \mu \underset{p}{\mu} \mu \end{array}$$

Por ejemplo:  $d_B(\mu \mu) = \begin{array}{c} \mu \\ \mu \end{array} - \begin{array}{c} \mu \\ \mu \end{array}$

**Ejemplo 1.32.** Ahora, presentemos de manera explícita el operad

$$\mathcal{A}_\infty^{(2)} := \Omega((\mathcal{A}^{(2)})^!) = \Omega(\mathcal{A}^{(2)})$$

Recordemos que

$$\mathcal{A}^{(2)}(1) = \langle 1 \rangle, \text{ y para } n \geq 2, \mathcal{A}^{(2)}(n) = \langle m_\xi : \xi \in \{\square, \blacksquare\}^{(n-1)} \rangle$$

Por lo tanto, al considerar  $X^{(2)}$  la colección dada por  $X_n^{(2)} = \{\square, \blacksquare\}^{(n-1)}$  resulta

$$\Omega(\mathcal{A}^{(2)})(n) = \langle \mathcal{T}X^{(2)}(n) \rangle$$

En otras palabras, el operad  $\Omega(\mathcal{A}^{(2)})$  es el operad generado (libremente) por las corolas etiquetadas por  $m_\xi$  y su diferencial queda definido por:

$$\partial(m_\xi) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\xi' \circ_i \xi'' = \xi} (-1)^{(i-1)+q(p-i)} m_{\xi'} \circ_i m_{\xi''}$$

donde  $p = |\xi'|, q = |\xi''|$ , y  $\xi' \circ_i \xi'' := (\xi'_1, \dots, \xi'_{i-1}, \xi''_1, \dots, \xi''_{q-1}, \xi'_i, \dots, \xi'_{p-1})$ . Equivalentemente,  $\xi' \circ_i \xi''$  es la etiqueta correspondiente a  $m_{\xi'} \circ_i^{A^{(2)}} m_{\xi''}$ .

Por ejemplo,

$$\partial m_{\blacksquare \square} = m_{\square} \circ_1 m_{\blacksquare} - m_{\blacksquare} \circ_2 m_{\square}$$

En el capítulo 3 se construye un morfismo  $\mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$  decretando su valor en los generadores  $m_\xi$ . Corroborar que efectivamente se haya definido un morfismo de operads consiste en verificar  $\mu\partial = \delta\mu$  donde  $\delta$  es el diferencial de  $\mathcal{Cacti}$ . Esta ecuación, a su vez sólo es necesaria verificarla para cada  $m_\xi$ . En el apéndice B se describe de qué manera esto se ha corroborado con la ayuda de la computadora hasta etiquetas  $\xi$  de largo  $|\xi| = 9$  (lo que se traduce en ecuaciones de miles de términos).

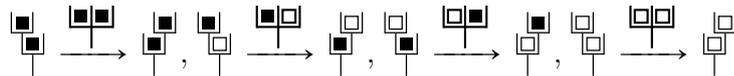
Pensamos una corolla de aridad  $n$  etiquetada por  $\xi \in \{\square, \blacksquare\}^{(n-1)}$  con el valor de  $\xi(i)$  dibujado entre la entrada  $i - 1$  e  $i$ , como puede verse en los siguientes ejemplos.

$$m_\square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array}, \quad m_\blacksquare = \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array}, \quad m_{\blacksquare\square} = \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \square \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array}, \quad m_{\blacksquare\square\square\square} = \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \square \square \square \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array}$$

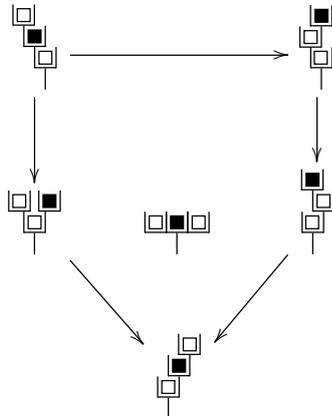
Así, el cálculo anterior, puede escribirse como

$$\partial \left( \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \square \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \circ_1 \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \circ_2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array}$$

Por último, cabe mencionar que de manera análoga al operad  $\mathcal{A}_\infty$ , el operad  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  se puede describir con polítopos de Stasheff. Es decir, la ecuación para el valor del diferencial en los generadores puede esquematizarse con dichos polítopos. En este caso, en cambio, se tiene en aridad  $n$  un polítopo por cada generador. Es decir, en vez de un sólo polítopo, se tiene uno por cada etiqueta  $\xi \in \{\square, \blacksquare\}^{n-1}$ . En aridad tres se tienen las siguientes 1-celdas:



En aridad cuatro, se tiene un pentágono por cada  $\xi \in \{\square, \blacksquare\}^3$ , por ejemplo para  $\xi = (\square, \blacksquare, \square)$  se tiene



**Ejemplo 1.33.** Aunque no sea crucial en el desarrollo de esta tesis, podemos mostrar, a modo de ejemplo, el operad  $\mathcal{A}_\infty^{\langle 2 \rangle}$ . Ya que este operad es Koszul [Str08], el mismo será

$$\mathcal{A}_\infty^{\langle 2 \rangle} = \Omega \mathcal{A}^{\langle 2 \rangle!}$$

Este operad está dado por [Zha13, 4.4]:

$$\mathcal{A}_\infty^{\langle 2 \rangle}(n) = \langle m_{a,b} : n = a + b + 1 (i, j \geq 0) \rangle$$

con  $|m_{a,b}| = n - 2$  y diferencial dado por

$$\partial(m_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{a=r+u, b=s+v} (-1)^{(i-1)+q(p-i)} m_{r,s} \circ_i m_{u,v}$$

donde,  $p = |m_{r,s}|, q = |m_{u,v}|$ .

Podemos pensar que, si en el caso de  $\mathcal{A}^{(2)}$  las corolas están etiquetadas por tiras  $\xi \in \{\square, \blacksquare\}^{n-1}$ , en  $\mathcal{A}^{\langle 2 \rangle!}$  están etiquetadas por la cantidad de blancos y negros. Es decir, como en  $\mathcal{A}^{\langle 2 \rangle!}$  las operaciones  $\square$  y  $\blacksquare$  se pueden intercambiar, sólo importa la cantidad. Análogamente a lo que sucede en el operad  $\mathcal{A}^{(2)}$ , desde un punto de vista geométrico, se tiene un polítopo de Stasheff por cada par  $a, b$  con  $a + b = n - 1$ .

Fijemos brevemente la siguiente notación. Diremos que  $[\xi] = (a, b)$  para una etiqueta  $\xi \in \{\square, \blacksquare\}^{n-1}$  si la cantidad de veces que  $\square$  aparece en  $\xi$  es  $a$  y la cantidad que  $\blacksquare$  aparece es  $b$ . Podemos formalizar lo dicho en el párrafo anterior observando que se tiene un morfismo de operads:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\infty^{\langle 2 \rangle} &\xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}_\infty^{(2)} \\ m_{a,b} &\mapsto \sum_{[\xi]=(a,b)} m_\xi \end{aligned}$$

Desde el punto de vista geométrico, esta aplicación le asigna a cada polítopo de Stasheff correspondiente a un par  $(a, b)$  en  $\mathcal{A}_\infty^{\langle 2 \rangle}$  la suma de todos los polítopos en  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  con etiquetas  $\xi$  tales que  $[\xi] = (a, b)$ .

Por otra parte, se tiene un morfismo  $\mathcal{A}_\infty \rightarrow \mathcal{A}_\infty^{\langle 2 \rangle}$  dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\infty &\xrightarrow{\psi} \mathcal{A}_\infty^{\langle 2 \rangle} \\ \mathbf{m}_n &\mapsto \sum_{a+b=n-1} \mathbf{m}_{a,b} \end{aligned}$$

Nuevamente, podemos pensar de manera geométrica que este morfismo asigna al polígono de aridad  $n$  en  $\mathcal{A}_\infty$ , la suma de los polígonos en  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  etiquetados por  $(a, b)$  tales que  $a + b = n - 1$ .

Tenemos entonces el siguiente corolario

**Corolario 1.34.** *Toda  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$ -álgebra es una  $\mathcal{A}_\infty^{\langle 2 \rangle}$ -álgebra y toda  $\mathcal{A}_\infty^{\langle 2 \rangle}$ -álgebra es una  $\mathcal{A}_\infty$ -álgebra.*

En el capítulo 3 definiremos (ver 3.6) un morfismo  $\mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$  partiendo de

$$\begin{array}{c} \blacksquare \\ \vdots \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \\ \vdots \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \\ \curvearrowleft \end{array}$$

El mismo tendrá la particularidad de que ambas operaciones son asociativas y, por lo tanto tendremos  $m_{\square\square} = m_{\bullet\bullet} = 0$  (no así  $m_{\square\bullet}$  y  $m_{\bullet\square}$ ). A partir de el morfismo  $\mu$  conseguiremos un morfismo  $\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\eta} \mathcal{Cacti}$  gracias a la relación entre los operads  $\mathcal{A}_\infty$  y  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  que resumimos en la siguiente observación

**Observación 1.35.** Se tiene el morfismo de  $(dg)$ -operads  $\phi = \varphi \circ \psi$ ,

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{A}_\infty & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{A}_\infty^{(2)} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A}_\infty^{(2)} \end{array}$$

El mismo está definido en el generador de cada aridad de  $\mathcal{A}_\infty$  como la suma de los generadores de dicha aridad en  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$ .

Más precisamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(n) &\rightarrow \mathcal{A}^{(2)}(n) \\ \mathfrak{m}_n &\mapsto \sum_{|\xi|=n} \mathfrak{m}_\xi \end{aligned}$$

Esto se utilizará más adelante para definir una estructura de  $\mathcal{A}_\infty$ -álgebra en el operad  $\mathcal{Cacti}$  (ver definición 2.4). Se construirá una aplicación  $\mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$  y se obtendrá la estructura de  $\mathcal{A}_\infty$ -álgebra mediante la composición:

$$\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$$

En resumen, veremos que se tiene en toda  $\mathcal{Cacti}$ -álgebra una estructura de álgebra sobre el operad  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  que, en particular, es una estructura de álgebra sobre los operads  $\mathcal{A}_\infty^{\langle 2 \rangle}$  y  $\mathcal{A}_\infty$ .

A continuación, para completar la presentación de los operads  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{(2)}$ , veamos que ambos son Koszul.

**Proposición 1.36.**  $\mathcal{A}$  es Koszul (ver [LV12, 8.1.1]). También  $\mathcal{A}^{(2)}$  es Koszul (ver [LV12, 9.7.4] y [ZBG12]).

El resultado se consigue de manera análoga al caso del operad  $\mathcal{A}$  vía el método de reescritura que veremos a continuación. De hecho, es el ejercicio 9.7.4 en [LV12]. Daremos un bosquejo de la demostración aquí. Al momento de escritura de esta tesis, el mismo resultado ha sido publicado en [ZBG12].

La siguiente definición y el teorema a continuación (ver [LV12, 8.1]) dan un criterio para determinar si un operad cuadrático es Koszul, el llamado *método de reescritura*.

**Definición 1.37.** Sea  $\mathcal{O}(X, R)$  un operad cuadrático con un orden en  $X = \{\mu_1 < \dots < \mu_k\}$ . Las operaciones ternarias están generadas por  $\{\mu_i \circ_1 \mu_j, \mu_i \circ_2 \mu_j\}$ . Se impone el siguiente orden:

- $\mu_i \circ_2 \mu_j < \mu_i \circ_1 \mu_j$
- $\mu_i \circ_{1|2} \mu_j < \mu_k \circ_{1|2} \mu_l$  si  $i < k$  para cualesquiera  $j, l$ .
- $\mu_i \circ_{1|2} \mu_j < \mu_i \circ_{1|2} \mu_k$  si  $j < k$  para cualquier  $i$ .

Este orden define una *regla de reescritura* de la siguiente manera.

Sea  $\sum \lambda_{i,s,j}(\mu_i \circ_s \mu_j) \in R$ , donde  $\lambda_0(\mu_{i_0} \circ_{s_0} \mu_{j_0})$  es el mayor de los términos (no nulos), entonces la regla de reescritura es

$$\lambda_0(\mu_{i_0} \circ_{s_0} \mu_{j_0}) \mapsto \sum_{\lambda_{i,s,j} \neq \lambda_0} \lambda_{i,s,j}(\mu_i \circ_s \mu_j)$$

Al término  $\lambda_0(\mu_{i_0} \circ_{s_0} \mu_{j_0})$  lo llamaremos *líder*. Un monomio en tres generadores  $\mu_i \circ_s \mu_j \circ_t \mu_k$  se dice *crítico* si tanto  $\mu_i \circ_s \mu_j$  como  $\mu_j \circ_t \mu_k$  son términos líderes. Dado un término crítico, se pueden aplicar las reglas de reescritura de dos maneras. Si se llega (por los todos los caminos posibles) al mismo resultado aplicando sucesivamente las reglas de reescritura a un término, éste se dice *confluyente*.

**Teorema 1.38.** [LV12] Sea  $\mathcal{O}(X, R)$  un operad cuadrático. En la notación de la definición anterior, si cada monomio crítico es confluyente entonces el operad es Koszul.

Vía el método de reescritura, se tiene entonces el siguiente resultado.

**Corolario 1.39.** El operad  $\mathcal{A}^{(2)}$  es Koszul.

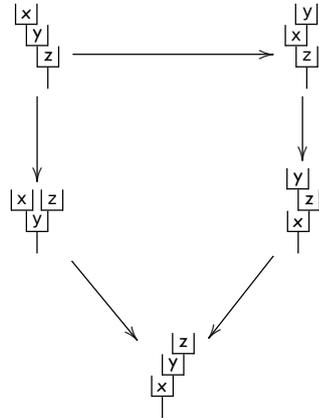
*Demostración.* Las reglas de reescritura son:

$$\begin{array}{c} \boxed{x} \\ \boxed{y} \\ | \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \boxed{y} \\ \boxed{x} \\ | \end{array}$$

para  $x, y \in \{\square, \blacksquare\}$ , es decir:

$$\begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \\ | \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \\ | \end{array}, \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \square \\ | \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \square \\ \blacksquare \\ | \end{array}, \quad \begin{array}{c} \square \\ \blacksquare \\ | \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \blacksquare \\ \square \\ | \end{array}, \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \\ | \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \square \\ \square \\ | \end{array}$$

Los monomios críticos son los de la forma  $\begin{array}{c} \boxed{x} \\ \boxed{y} \\ \boxed{z} \\ | \end{array}$  para  $x, y, z \in \{\square, \blacksquare\}$ . Al calcular los dos caminos de reescritura posibles, el pentágono queda confluente:



□

### 1.3. Operads simétricos

En la literatura, el concepto de operad definido anteriormente se suele llamar operad planar u operad no simétrico y tiene su origen (aunque con diferente notación) en el trabajo seminal de Gerstenhaber [Ger63] bajo la denominación *sistema pre-Lie*. El vocablo “operad” (debido a May [May72]) se utiliza para denotar lo que nosotros llamaremos un operad *simétrico*. Este concepto es sumamente útil para modelar álgebras en cuya definición se intercambian entradas (conmutativas, de Lie, de Gerstenhaber, de Poisson, pre-Lie, etc). Incluimos la definición en esta monografía debido a su importancia y para evitar confusión, si bien es cierto que sólo utilizaremos el concepto de operad simétrico en el capítulo 4 donde consideraremos la estructura simétrica del operad *Cacti*. Por ejemplo, en el teorema 4.10 se da la descripción de las *Cacti*-álgebras al considerar la estructura simétrica.

**Definición 1.40.** [LV12, 5.3.4] Un operad *simétrico* es un operad  $\mathcal{O}$  con una acción del grupo simétrico en  $n$  elementos  $S_n$  en  $\mathcal{O}(n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  tal que las composiciones parciales son equivariantes. Es decir, con la notación del ejemplo 1.4, se tiene

$$(w_p \bullet \sigma_p) \circ_i (w_q \bullet \sigma_q) = (w_p \circ_i w_q) \bullet (\sigma_p \circ_i^S \sigma_q)$$

para  $\omega_p \in \mathcal{O}(p), \omega_q \in \mathcal{O}(q), \sigma_p \in S_p, \sigma_q \in S_q$  cualesquiera. Un *morfismo de operads simétricos* es un morfismo de operads equivariante.

A continuación, mostramos brevemente las relaciones entre ambos conceptos. Lo que resta del capítulo se basa principalmente en [LV12, 5.9.11].

**Observación 1.41.** Todo operad simétrico puede verse como operad (no simétrico) olvidando la estructura (dada por las acciones de los grupos  $S_n$ ).

**Ejemplo 1.42.** El operad  $\mathcal{E}nd$  del ejemplo 1.3 es en realidad un operad simétrico (ver [LV12, 5.2.11]). Al actuar con una permutación  $\sigma \in S_n$  en una  $f \in s\mathcal{E}nd(V)(n) = \text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$ , se obtiene la función  $f^\sigma$  dada por permutar las entradas de  $f$ .

Cuando nos estemos refiriendo a él como operad simétrico, lo notaremos  $s\mathcal{E}nd$  para explicitar que se está teniendo en cuenta dicha estructura. Al presentarlo en 1.3, lo hicimos como operad no simétrico, olvidando así (ver [LV12, 5.9.8]) la estructura simétrica.

También, de manera análoga al caso no simétrico, se tiene la noción de  $\mathcal{O}$ -álgebra en el contexto simétrico: un morfismo de operads simétricos

$$\mathcal{O} \rightarrow s\mathcal{E}nd(V)$$

Notar que si consideramos a ambos operads como planares, las nociones de álgebra simétrica y no simétrica en general no coinciden. Dejaremos claro a qué nos referimos en cada caso, especialmente en el capítulo 4.

Considerar un operad simétrico como planar tiene una construcción adjunta que llamaremos la *regularización* de un operad. Para ser más precisos, fijemos la categoría de trabajo  $\mathcal{V}$  a  $dg$ -espacios vectoriales. Llamemos  $Opd$  a la categoría de operads planares y  $Opd^S$  a la categoría de operads simétricos.

**Observación 1.43.** El olvido de la estructura simétrica es un funtor de la categoría de  $dg$ -operads simétricos en la de  $dg$ -operads no simétricos. Este funtor, que llamaremos  $Ou$ , tiene un adjunto  $S \dashv Ou$ :

$$Opd \begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \xleftarrow{Ou} \end{array} Opd^S$$

Para un operad  $\mathcal{O}$ , el operad  $S\mathcal{O}$  se define en cada aridad por el producto tensorial de las operaciones  $n$ -arias y la representación regular de dimensión  $n$  (ver [LV12, 5.9.11]), es decir:

$$S\mathcal{O}(n) := \mathcal{O}(n) \otimes k[S_n]$$

Podemos pensar esta construcción como agregar al espacio de operaciones  $n$ -arias las operaciones que se consiguen de las originales permutando las entradas. Por ejemplo, si  $\mathcal{O}(n) = \langle X_n \rangle$ , con  $X_n$  un conjunto, será  $S\mathcal{O}(n) = \langle \{(x, \sigma) \in X_n \times S_n\} \rangle$ .

Se llama *regulares* a los operads simétricos que provienen de regularizar un operad no simétrico, o sea, a los operads simétricos en la imagen de  $S$ . No todos los operads simétricos son regulares, es fácil ver que el operad  $s\mathcal{E}nd(V)$  no lo es.

En lo que concierne al presente trabajo, el concepto de regularización de un operad sólo es relevante en relación a los operads  $\mathcal{A}$  y  $S\mathcal{A} = \mathcal{A}ss$  (presentado a continuación) y sus versiones a menos de homotopía.

**Ejemplo 1.44.** Sea  $\mathcal{A}ss$  el operad simétrico dado por:

- $\mathcal{A}ss(n) = \langle m_n \sigma : \sigma \in S_n \rangle = \langle m_n \rangle_{S_n}$  módulo libre  $\simeq \langle S_n \rangle$
- $m_p \sigma \circ_i m_q \tau := (m_p \circ_i^{\mathcal{A}} m_q)(\sigma \circ_i^S \tau) = m_{p+q-1}(\sigma \circ_i^S \tau)$

Notar que  $\mathcal{A}ss$  es la regularización del operad  $\mathcal{A}$ . Por lo tanto, los morfismos de operads no simétricos  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}nd(V)$  están en correspondencia uno a uno con los morfismos de operads simétricos de  $\mathcal{A}ss \rightarrow s\mathcal{E}nd(V)$ . Luego, las nociones de  $\mathcal{A}$ -álgebra y  $\mathcal{A}ss$ -álgebra coinciden.

El siguiente ejemplo es central en la teoría de operads simétricos y, al mismo tiempo, no es expresable de manera no simétrica (es decir, no proviene de regularizar un operad planar).

**Ejemplo 1.45.**

El operad simétrico  $Com$  [LV12, 5.2.10] que modela álgebras conmutativas está dado por:

- $Com(n) = \langle \bar{m}_n \rangle$ , con acción trivial:  $\bar{m}_n \sigma = \bar{m}_n \forall \sigma \in S_n$ .
- $\bar{m}_p \circ_i \bar{m}_q := \bar{m}_{p+q-1}$

La noción de  $Com$ -álgebra es la de álgebra conmutativa. Observemos que se tiene un morfismo de operads:

$$\begin{aligned} Ass &\rightarrow Com \\ m_n \sigma &\mapsto \bar{m}_n \end{aligned}$$

Vimos de qué manera definir operads (planares) mediante operaciones y relaciones. Si bien lo hemos hecho en el contexto de operads no simétricos, esto puede hacerse, de manera análoga, para operads simétricos. Llamemos  $g\mathcal{E}ns$  a la categoría de conjuntos graduados y abreviemos por  $\mathcal{F}(X)$  al operad libre en un conjunto graduado, es decir, la linealización del operad libre en conjuntos:

$$\mathcal{F}(X) = \langle \mathcal{T}(X) \rangle$$

**Observación 1.46.** Dado un conjunto graduado  $X = \{X_n\}_{\geq 2}$ , el operad simétrico libre en  $X$ ,  $\mathcal{F}_S(X)$ , es la regularización del operad libre en  $X$ :

$$\mathcal{F}_S(X) = S\mathcal{F}(X)$$

Esto se debe a que  $S$  y  $\mathcal{F}$  son adjuntos a los funtores olvido:

$$g\mathcal{E}ns \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}} \\ \xleftarrow{Ou} \end{array} Opd \begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \xleftarrow{Ou} \end{array} Opd^S$$

Así, por ejemplo, puede definirse el operad  $\mathcal{L}ie$  (que codifica álgebras de Lie) como un operad cuadrático (análogamente a la definición 1.22)

**Ejemplo 1.47.** El operad  $\mathcal{L}ie$  [LV12, 5.2.10] está generado por una operación binaria  $c_2$  (el corchete) que es antisimétrica (o sea,  $c_2^{(1 \leftrightarrow 2)} = -c_2$ ) sujeto a la relación cuadrática dada por la ecuación de Jacobi.

Varias otras estructuras algebraicas pueden ser modeladas en el lenguaje de operads simétricos, por ejemplo álgebras de Poisson y Gerstenhaber.

Como se mencionó anteriormente, no es nuestra intención extendernos en el concepto de operad simétrico ya que no es clave en el desarrollo de la presente tesis. Sin embargo, consideramos pertinente mencionar lo siguiente. En el capítulo 3, se estudiará qué ocurre al cambiar un producto asociativo (no necesariamente conmutativo) por su simetrización (para volverlo conmutativo). El producto estudiado está dado por el cactus  $\mathfrak{V}$ .

Los operads estudiados en dicho capítulo,  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Cacti}$ , poseen una estructura de operads simétricos (dada por intercambiar las etiquetas del codominio y los lóbulos, respectivamente). El producto simetrizado está dado, entonces, por la suma de dicho cactus y él mismo actuado por la transposición ( $1 \leftrightarrow 2$ ):

$$\mathfrak{V} + \mathfrak{V}^{(1 \leftrightarrow 2)} = \mathfrak{V} + \mathfrak{V}$$

De todas maneras, allí el concepto de operad simétrico no se utiliza, ya que se explicita  $\mathfrak{V}^{(1 \leftrightarrow 2)} = \mathfrak{V}$ .

En el siguiente capítulo, al definir el morfismo de operads no simétricos  $\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\eta} \mathcal{Cacti}$  se tiene, por la observación anterior, un morfismo de operads simétricos  $\mathcal{Ass}_\infty \xrightarrow{\tilde{\eta}} s\mathcal{Cacti}$  (donde  $\mathcal{Ass}_\infty$  es la versión a menos de homotopía de  $\mathcal{Ass}$  [LV12, 9.2] y, al mismo tiempo,  $\mathcal{Ass}_\infty = S\mathcal{A}_\infty$ ).

Para poder determinar qué datos se requieren para definir una  $s\mathcal{Cacti}$  álgebra, en la observación 2.9 se consideran generadores de  $s\mathcal{Cacti}$  como operad simétrico, lo que debe interpretarse en el marco de la observación 1.46.

Más adelante (en el capítulo 4) se estudian  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebras, es decir álgebras sobre el operad simétrico. Para esto, previamente se establece la relación entre álgebras sobre el operad  $\mathcal{Cacti}$  y sobre el operad simétrico  $s\mathcal{Cacti}$ .



# Capítulo 2

## El operad *Cacti*

En este capítulo estudiaremos el operad *Cacti* [Kau07]. Este operad es llamado originalmente  $\mathcal{H}$  en [MS02] y codifica las álgebras de Gerstenhaber y Voronov [GV95]. Con el objetivo de fijar una convención de notación y signos, lo veremos como suboperad del operad de suryecciones definido por Berger y Fresse en [BF04].

El capítulo se organiza de la siguiente manera.

En la primera sección se define el operad  $\mathcal{X}$  de suryecciones [BF04] del cual *Cacti* será un suboperad. Así, las definiciones y convenciones de signo introducidas en esta sección (para  $\mathcal{X}$ ) serán las que se utilizarán a lo largo del resto del capítulo (para *Cacti*). Creemos que a considerar el operad  $\mathcal{X}$  permite dar una definición precisa de dichas definiciones y convenciones. Lo que, a su vez, es requisito indispensable para la implementación computacional (descrita en el apéndice B) y los cálculos realizados

Se continúa definiendo el operad de cactus haciendo énfasis en la notación por medio de *esquemas de cactus*. Se revisan las definiciones de las composiciones parciales y el diferencial para presentar una interpretación geométrica de las mismas en el operad de cactus. Si bien puede parecer superfluo, este cambio en la notación ha sido fundamental ya que ha proporcionado la intuición necesaria para las construcciones y resultados del resto del trabajo.

En la siguiente sección se presenta el comenta la estructura simétrica en el operad *Cacti* y se lo presenta dado por generadores y relaciones.

En la última sección se presenta el ejemplo clásico [GV95] de *Cacti*-álgebra: el complejo de Hochschild de un álgebra asociativa.

## 2.1. El operad de suryecciones

En [BF04] se define el operad de suryecciones  $\mathcal{X}$  de la siguiente manera.

**Definición 2.1.** Una función  $u : \{1, \dots, n+k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  sobreyectiva se dice no-degenerada si  $u(i) \neq u(i+1)$  para todo  $i$ .

Se define  $\mathcal{X}(n)$  como el espacio vectorial diferencial graduado cuya componente en grado  $k$ ,  $\mathcal{X}(n)_k$ , está generada por las suryecciones no-degeneradas  $u : \{1, \dots, n+k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ .

Usualmente denotaremos una suryección  $u$  por su secuencia de valores,

$$u = (u(1), \dots, u(n+k)).$$

Asimismo, si no hay riesgo de confusión, nos permitiremos omitir las comas separadoras. Por ejemplo,  $(1, 2, 1) = (121)$ .

El diferencial  $\delta : \mathcal{X}(n)_k \rightarrow \mathcal{X}(n)_{k-1}$  está dado por

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^{n+k} \text{signo}_i(u) \delta_i(u)$$

donde  $\delta_i$  evita la  $i$ -ésima entrada de la secuencia,

$$\delta_i(u) = (u(1), \dots, u(\hat{i}), \dots, u(n+k)).$$

con  $\text{signo}_i(u)$  definido como cero si  $\delta_i(u)$  ya no es una suryección no degenerada y en otro caso está dado de la siguiente manera: se considera la subsecuencia de estos valores (los que  $\text{signo}_i(u)$  será no nulo),  $(u(j_1), \dots, u(j_k))$  donde se omite la última aparición de cada valor  $1, \dots, n$  y se define

- $\text{signo}_{j_r}(u) = (-1)^{r-1}$ ,
- $\text{signo}_j(u) = (-1)^r$  si  $u(j)$  es la última aparición de ese valor y  $u(j_r)$  la penúltima.

Por ejemplo, para  $u = (1213231)$ , al eliminar las apariciones del valor 2 queda una suryección degenerada. La subsecuencia mencionada en el párrafo anterior es  $(1, 1, 3)$  y al calcular el diferencial, queda:

$$\delta u = +(213231) - (123231) + (121231) - (121321) + (121323)$$

### Las composiciones parciales

$$\circ_t : \mathcal{X}(n)_k \otimes \mathcal{X}(m)_l \rightarrow \mathcal{X}(m+n-1)_{k+l} \quad (1 \leq t \leq n)$$

están definidas de la siguiente manera:

Si  $u \in \mathcal{X}(n)_k$  con  $r = |u^{-1}\{t\}|$ , entonces las  $r$  ocurrencias de  $t$  determinan  $r+1$  subsecuencias de  $u$  de siguiente manera:

$$u = (u_0, t, u_1, t, \dots, u_{r-1}, t, u_r)$$

Ahora, para una elección de índices  $1 = j_0 \leq \dots \leq j_r = m+l$ , se tienen las subsecuencias de  $v$  dadas por

$$v_p = (v(i))_{j_{p-1} \leq i \leq j_p}$$

Se define

$$u \circ_t v = \sum_{1=j_0 \leq \dots \leq j_r=m+l} \pm(\beta u_0, \alpha v_1, \beta u_1, \alpha v_2, \dots, \beta u_{r-1}, \alpha v_r, \beta u_r)$$

donde las funciones  $\alpha$  y  $\beta$  son

$$\alpha(s) = s + t - 1, \quad \beta(s) = \begin{cases} s & \text{si } s < t \\ s + m - 1 & \text{si } s > t \end{cases}$$

Para definir el signo de cada término en la suma, consideramos el *grado relativo* de una subsucesión  $u' = (u(a), u(a+1), \dots, u(b))$  respecto a la sucesión original  $u \in \mathcal{X}(n)_k$ . El mismo se define como

$$|u'| = \#\{a \leq i < b : u(i) = u(i') \text{ para algún } i' \text{ tal que } i < i' \leq m+k\}$$

esto es, la cantidad de valores (salvo el último) en la subsucesión  $u'$  que se repiten alguna vez más adelante en  $u$ .

El signo  $\pm$  es el signo de Koszul para la permutación de los  $2r$  símbolos:

$$u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r, \mapsto v_1, u_1, \dots, v_r, u_r,$$

donde el grado de  $u_r$  y  $u_q$  para  $q \neq r$  son los grados de  $(t, u_r)$  y  $(t, u_q, t)$  relativos a  $u$  y los grados de  $v_p$  son los grados respectivos a  $v$ .

**Ejemplo 2.2.** Consideremos las sucesiones  $(121) \in \mathcal{X}(2)_1, u \in \mathcal{X}(n)_k$ , la composición  $(121) \circ_1 u \in \mathcal{X}(n+1)_{k+1}$  está dada por

$$(121) \circ_1 u = \sum_{j=1}^{n+k} (-1)^{|u|_j} \hat{u}_j$$

donde  $|u|_j$  es el grado relativo de  $(u(1), \dots, u(j))$  respecto a  $u$  y  $\hat{u}_j$  está dado por reemplazar el  $j$ -ésimo valor de  $u$  por  $(u(j), n+1, u(j))$ ,

$$\hat{u}_j = (u(1), \dots, u(j-1), u(j), n+1, u(j), u(j+1), \dots, u(n+k)).$$

Por ejemplo si  $u = (123141)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= (15123141) & \hat{u}_2 &= (12523141) & \hat{u}_3 &= (12353141) \\ \hat{u}_4 &= (12315141) & \hat{u}_5 &= (12314541) & \hat{u}_6 &= (12314151) \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} (121) \circ_1 u &= (15123141) + (12523141) - (12353141) \\ &\quad - (12315141) - (12314541) + (12314151) \end{aligned}$$

En el siguiente apartado, estudiaremos el suboperad de  $\mathcal{X}$  dado por un tipo especial de suryecciones: los cactus (definición 2.4). Veremos más adelante que  $\hat{u}_j$  puede interpretarse geoméricamente en  $\mathcal{Cacti}$  como la operación dada por pegar el lóbulo  $n+1$  sobre el  $j$ -ésimo arco. Al hacerlo, volveremos sobre este ejemplo en la observación 2.7 y la definición 3.1, donde se presentan las construcciones  $\square$  y  $\blacksquare$ .

## 2.2. El operad de Cactus

Definiremos ahora el operad de Cactus como suboperad del operad  $\mathcal{X}$  de suryecciones. El mismo estará generado por cierto tipo de suryecciones que llamaremos cactus. Continuamos valiéndonos de [BF04], ya que diremos que  $\mathcal{Cacti} = \mathcal{X}_2$ , el segundo paso de la filtración presentada en la observación siguiente. Luego introduciremos una notación mediante la cual los cactus pueden representarse de manera gráfica (lo que justifica la nomenclatura). Esto nos permite cierta intuición geométrica en las operaciones. Por eso, revisamos la estructura de  $dg$ -operad desde esta notación.

**Observación 2.3.** Se tiene una filtración de suboperads [BF04]:

$$F_1\mathcal{X} \subset F_2\mathcal{X} \subset \dots \subset F_r\mathcal{X} \subset \dots \subset \mathcal{X}$$

donde el  $r$ -ésimo paso de la filtración está generado por las suryecciones  $u$  para las cuales las subsecuencias  $u_{i,j}$  formadas por los valores  $i$  y  $j$  no tienen más de  $r$  variaciones. Esto es, para cada  $1 \leq i < j \leq n$ , si  $u^{-1}(\{i, j\}) = \{k_1, \dots, k_s\}$  entonces  $|\{t : u(k_t) \neq u(k_{t+1})\}| \leq r$ .

Por ejemplo, para  $u \in \mathcal{X}(n)_k$  se tiene:

- $u \in F_1\mathcal{X}$  si y sólo si  $u$  es una biyección (o sea,  $k = 0$ ).
- $u \in F_2\mathcal{X}$  si y sólo si  $u$  no posee ninguna subsecuencia de la forma  $(i, j, i, j)$  para  $1 \leq i \neq j \leq n$  cualesquiera.

El segundo paso de esta filtración es, a menos de una convención de signo, isomorfo al complejo de cadenas del operad de Cactus topológico sin espinas [Kau07, KLP03].

De esta manera, consideraremos como definición del operad *Cacti* como dicho suboperad, esto es:

**Definición 2.4.** Llamaremos *Cacti* al suboperad  $F_2\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$ .

Decimos entonces que una suryección  $u : \{1, \dots, n+k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  es un *cactus* si tiene no más de 2 variaciones (o sea, no posee subsecuencias  $(i, j, i, j)$  con  $1 \leq i \neq j \leq n$ ). Por ejemplo, (1232141) y (2123) son cactus, pero (121312) no lo es. Llamaremos al dominio y el codominio del cactus *arcos* y *lóbulos* respectivamente.

## Representación geométrica de un cactus

Geoméricamente, los cactus se representan un diagrama de *lóbulos* y *arcos*. A continuación describiremos los diagramas a considerar y de qué manera estos representan cactus. Las definiciones formalizarán la siguiente idea: si se tiene un dibujo de un cactus con sus lóbulos numerados, al recorrerlo en sentido antihorario se produce una sucesión de números que corresponden a los lóbulos que se van recorriendo, y así se tiene una función suryectiva  $\{\text{arcos}\} \rightarrow \{\text{lóbulos}\}$ . Esta construcción es la que da la correspondencia entre la descripción combinatoria y la geométrica.

**Definición 2.5.** Un *esquema de cactus* consiste en los siguientes datos.

- Un número  $n \in \mathbb{N}$  que será la cantidad de lóbulos. Pensaremos los lóbulos indexados por el conjuntos  $\{1, \dots, n\}$ .
- Cada lóbulo tendrá una cantidad de puntos. Todo lóbulo tendrá siempre un punto base que notaremos  $\bullet_i$ .
- Cada lóbulo podrá tener (o no) otros puntos. Llamaremos  $P_i$  al conjunto de estos puntos.
- Consideraremos un punto extra,  $\bullet$  que será la raíz del cactus.
- Un árbol  $T$  dirigido, planar y con raíz cuyo conjunto de vértices es

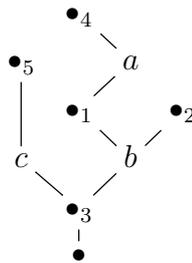
$$V(T) = \{\bullet, \bullet_1, \dots, \bullet_n\} \bigsqcup_{i=1}^n P_i$$

y se debe cumplir:

- La raíz del árbol es  $\bullet$ .
- $\text{Hojas}(T) \subset \{\bullet_1, \dots, \bullet_n\}$ .
- Para todo  $1 \leq i \leq n, p \in P_i$  se tiene la arista  $p \rightarrow \bullet_i$ .
- Se tiene para cada  $1 \leq i \leq n, p \in P_i$  una (única) arista  $\bullet_i \rightarrow p$  con  $p = \bullet$  o bien  $p \in P_j$  con  $j \neq i$ .

Notemos que, por definición, en cada vértice hay a lo sumo una única arista saliente. De igual modo que antes, al representar el árbol podemos omitir la dirección de las aristas pensando que el dibujo se encuentra orientado de arriba hacia abajo.

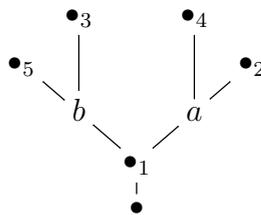
**Ejemplos:** Para  $n = 5$ , podemos considerar los esquemas dados por  $P_1 = \{a\}, P_2 = P_4 = P_5 = \emptyset, P_3 = \{b, c\}$  con árbol



■  $k_1 = 2, k_i = 0$  si  $i \neq 1$ .

■  $\rho(1) = \bullet, \rho(2) = \rho(4) = 1, \rho(3) = \rho(5) = 2$  con  $2 < 4$  y  $3 < 5$ .

y  $P_1 = \{a, b\}, P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = \emptyset$  con árbol

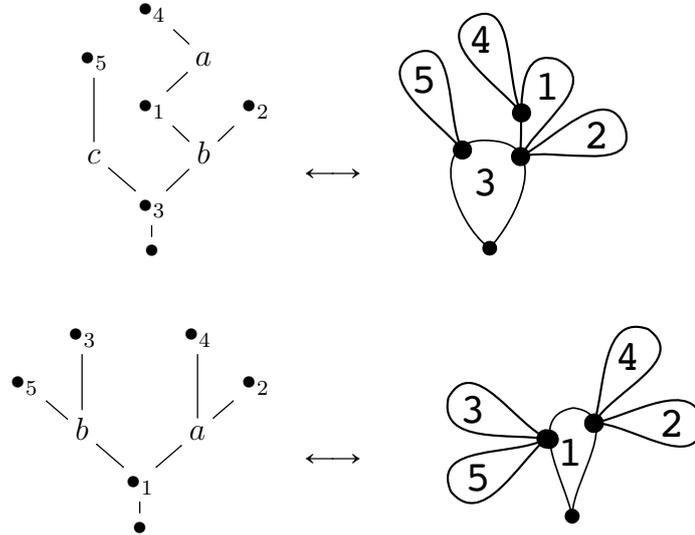


**Notación.** Un esquema de cactus se puede representar gráficamente de la siguiente manera.

- i. Por cada  $i$  se dibuja en el plano el lóbulo correspondiente, esto es una curva cerrada simple y se la etiqueta (dentro) con  $i$ .
- ii. En cada curva se marcan su punto base y los puntos  $P_i$  respetando el orden cíclico del árbol.
- iii. Se identifican los puntos dados por las aristas del tipo  $\bullet_i \rightarrow p$  respetando el orden cíclico en  $p$  (es decir, como los lóbulos que se intersecan en  $p$  en el dibujo y los puntos base conectados directamente con  $p$  en el árbol coinciden, deben estar dispuestos de la misma manera). el punto base del  $i$ -ésimo lóbulo al punto  $p(i)$ .

Por convención, siempre dibujaremos un cactus con la raíz abajo y en el caso de que varios lóbulos se peguen en un mismo punto, el orden en los mismos como de derecha a izquierda.

Los ejemplos anteriores se pueden dibujar de la siguiente manera:



Observemos que se obtiene, por medio de este procedimiento, una figura en el plano formada por  $n$  curvas simples cerradas etiquetadas. En la misma se encuentran marcados  $k + 1$  puntos que corresponden a la raíz y los  $k_i$  puntos sobre cada lóbulo (es decir, si  $k_i = \sharp P_i$  se tienen  $1 + \sum k_i$  puntos marcados en el dibujo). Los puntos  $k + 1$  puntos distinguidos determinan entonces  $n + k$  arcos (segmentos de curva entre dos de estos puntos).

Veamos ahora de qué manera un esquema representa una suryección. Al considerar un esquema con  $n$  lóbulos y  $n + k$  arcos, la suryección que le corresponda será, entonces, la aplicación que a cada arco le asigna el lóbulo al que pertenece. Para esto, debemos dar una manera de etiquetar los arcos de un esquema con el conjunto  $\{1, \dots, n + k\}$ . En otras palabras, debemos distinguir un orden total en el conjunto de los arcos de un esquema.

Se define un orden cíclico en el conjunto de arcos de las siguiente manera. La orientación positiva (anti-horaria) de cada lóbulo induce una dirección en sus arcos, es decir, determina sus puntos de inicio y fin. Supongamos que tenemos un arco  $p \rightsquigarrow q$  (es decir, un arco que comienza en  $p$  y termina en  $q$ ) sobre un lóbulo  $i$ . A partir del orden cíclico en el conjunto de lóbulos que se intersecan en  $q$ , se considera  $j$  el lóbulo siguiente al  $i$ . En el dibujo del esquema, el lóbulo  $j$  es el que siguiente a  $i$  cuando se leen los lóbulos que confluyen en  $q$  de manera antihoraria. En este lóbulo, hay un único arco  $q \rightsquigarrow r$  (es decir, un único arco que comienza en  $q$ ) y es éste el que se define como sucesor de  $p \rightsquigarrow q$ .

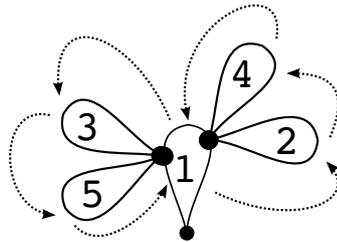
Por último, se define como arco inicial al arco que comienza en la raíz y que pertenece al primer lóbulo que se pega en la misma (los lóbulos que allí se pegan tienen un orden). De esta manera, se tiene un orden total en los arcos de un esquema.

Gráficamente, este proceso corresponde a recorrer arco por arco el exterior del dibujo en sentido antihorario comenzando en la raíz.

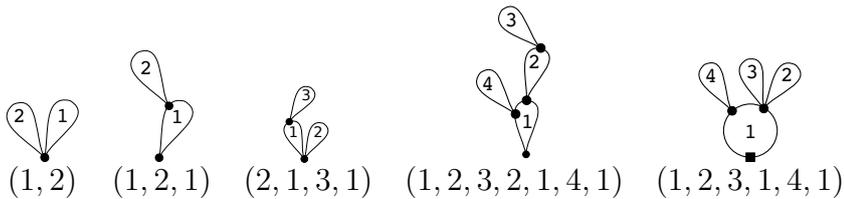
El orden total permite etiquetar los arcos por el conjunto  $\{1, \dots, n+k\}$ . De esta manera se tiene una suryección definida como:

$$\begin{aligned} \{1, \dots, n+k\} &\rightarrow \{1, \dots, n\} \\ \text{arco} &\mapsto \text{lóbulo} \end{aligned}$$

Al aplicarle este proceso al ejemplo de esquema que vimos antes,



obtenemos el cactus de 5 lóbulos y 7 arcos  $(1, 2, 4, 1, 3, 5, 1)$ . Veamos unos ejemplos más:



Lo importante es que, dada una suryección que es un cactus, el proceso se puede revertir. Se comienza de la raíz y se dibuja cada arco del esquema en sentido antihorario. La propiedad de que la suryección en cuestión sea un cactus permite, justamente, obtener un esquema como resultado.

En resumen, el proceso de leer un dibujo en sentido antihorario desde la raíz da lugar a un único cactus y todo cactus puede obtenerse de esta forma. Tenemos entonces una notación para los generadores del operad *Cacti*. A continuación, presentamos de qué manera se pueden interpretar geoméricamente el diferencial y las composiciones parciales.

**Observación 2.6.** En la representación gráfica el diferencial se puede ver como la suma de los cactus que se obtienen al eliminar los arcos que no son lóbulos enteros. Más precisamente, si llamamos *arco propio* a un arco que no es un lóbulo entero, el diferencial de un cactus se calcula como la suma de los cactus que se obtienen al eliminar los arcos propios. El procedimiento para determinar el signo del término correspondiente a cada arco es el siguiente.

Empezando desde la raíz y en sentido antihorario, se asigna alternadamente  $+$  y  $-$  a cada arco propio salvo al último de cada lóbulo. Luego, al último de cada lóbulo se le asigna el signo contrario al anteúltimo del mismo lóbulo.

Esto puede verse en el siguiente ejemplo:

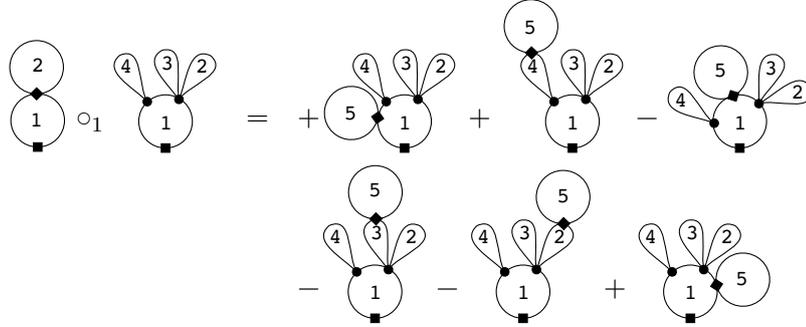
$$\delta(\text{cactus}) = + \text{cactus}_1 - \text{cactus}_2 + \text{cactus}_3 + \text{cactus}_4 - \text{cactus}_5$$

**Observación 2.7.** La composición  $u \circ_i v$  puede verse gráficamente como la suma de todos los cactus posibles obtenidos por reemplazar el  $i$ -ésimo lóbulo de  $u$  por todo el cactus  $v$  y luego plantar los subcactus de  $u$  que originalmente estaban sobre el lóbulo  $i$  en todos los arcos posibles de  $v$  (manteniendo el orden relativo de aquellos). Es decir,

$$\text{cactus}_u \circ_i \text{cactus}_v = \sum \pm \text{cactus}_{u \circ_i v}$$

El signo de cada término puede calcularse a partir de los dibujos de manera sencilla. Los puntos base de los lóbulos (que no son la raíz) de cada término de  $u \circ_i v$  corresponden a los puntos base de los lóbulos de cada uno de los cactus (que no son la raíz)  $u$  y  $v$ . Los puntos base de cada cactus los pensamos ordenados en sentido antihorario a partir de la raíz. Así, el signo de cada término corresponde al signo de la permutación de los puntos de  $u$  seguidos de los de  $v$  al orden en el que se encuentran en dicho término.

Por ejemplo, si  $u$  es el cactus de 2.2,  $u = (123141) =$  , se tiene



donde las disposiciones de los puntos son  $\bullet \bullet \blacklozenge$  en la original y en los dos primeros términos del resultado,  $\bullet \blacklozenge \bullet$  en los siguientes tres y  $\blacklozenge \bullet \bullet$  en el último.

### 2.3. *Cacti* como operad simétrico

Es una buena oportunidad para describir la estructura de operad simétrico en *Cacti* y de esta manera evitar confusiones entre ambos conceptos. En realidad, el operad  $\mathcal{X}$  tiene una estructura de operad simétrico con las permutaciones actuando en el conjunto de llegada de las suryecciones (las etiquetas de los lóbulos en los cactus). Más precisamente, si  $u \in \mathcal{X}(n)_k$ ,  $u = (u(1), \dots, u(n+k))$  una permutación  $\sigma \in S_n$  actúa vía  $u^\sigma = (\sigma(u(1)), \dots, \sigma(u(n+k)))$ . En *Cacti* esto se traduce en permutar las etiquetas de los lóbulos.

Por lo visto en la sección 1.3, los morfismos de operads no simétricos de  $\mathcal{A}_\infty$  en *Cacti* están en correspondencia con los morfismos de operads simétricos de  $\mathcal{A}ss_\infty$  en *sCacti*. Por lo tanto, se deduce el siguiente corolario:

**Corolario 2.8.** *El morfismo  $\eta$  define un morfismo de operads simétricos  $\tilde{\eta} : \mathcal{A}ss_\infty \rightarrow sCacti$ .*

En el caso de una estructura de álgebra en un espacio  $V$ , tanto *sCacti* como  $s\mathcal{E}nd(V)$  pueden verse como operads simétricos o no. De esta manera, una *sCacti*-álgebra (es decir, considerando  $sCacti \rightarrow s\mathcal{E}nd(V)$  un morfismo de operads simétricos) es equivalente a una *Cacti*-álgebra con la propiedad de que para todo cactus

$$u^\sigma(x_1, \dots, x_n) = u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Para concluir la presentación de la estructura simétrica, la siguiente observación muestra cuáles son los generadores de *sCacti* (como operad simétrico).



de compatibilidad (para  $a, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m \in V$ ).

$$(B_n \circ_1 B_m)(a, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m) = B_n(B_m(a, b_1, \dots, b_n), c_1, \dots, c_m)$$

Las cuales, al explicitar  $B_n \circ_1 B_m$

$$\begin{aligned} B_n \circ_1 B_m &= \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \\ &= \sum_{\text{posibilidades}} \pm \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \end{array} \end{aligned}$$

(donde el signo está dado por la permutación de los puntos de  $B_n$  y  $B_m$  como se describe en la observación 2.7), se obtienen las llamadas identidades de *braces*.

- Por otra parte, las operaciones deben verificar (para  $a, b, c_1, \dots, c_m \in V$ )

$$(B_m \circ_1 C_2)(a, b, c_1, \dots, c_m) = B_m(C_2(a, b), c_1, \dots, c_m).$$

Estas ecuaciones pueden interpretarse como una regla de distributividad al calcular de manera explícita  $B_n \circ_1 C_2$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} = \sum_k \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \end{array}$$

- Las acciones de  $C_2$  y  $B_n$  así definidas sean compatibles con el diferencial de  $V$ , esto es  $\delta C_2 = [d, C_2]$  y  $\delta B_n = [d, B_n]$ . Como  $\delta C_2 = 0$ , se tiene que el producto dado por  $C_2$  hace de  $V$  un álgebra asociativa d.g. En cuanto al borde de  $B_m$ , recordemos que éste se escribe en función de los generadores de la siguiente forma

$$\delta B_m = \delta \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} + \sum_{i=2}^{m-1} (-1)^{i+1} \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \end{array} + (-1)^{m+1} \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \end{array}$$

lo que nos dice que en  $V$  debe ser

$$[d, B_n] = (C_2 \circ_2 B_{m-1})^{(12)} + \sum_{i=2}^{m-1} (-1)^{i+1} B_{m-1} \circ_i C_2 + (-1)^{m+1} C_2 \circ_1 B_{m-1}$$

**Observación 2.10.** A partir de la observación anterior, vemos que se puede definir el diferencial de manera más elegante determinando su valor en los generadores y extendiendo como derivación de las composiciones parciales. Esto es, definiendo

$$\begin{aligned}\delta C_n &= 0 \\ \delta B_n &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} (1, 2, 1, \dots, \underbrace{\times}_{i\text{-ésimo } 1}, \dots, 1, n, 1)\end{aligned}$$

La forma en la que se introdujo anteriormente tiene la ventaja de ser una fórmula que permite calcular el diferencial en cada elemento de la base (como espacio vectorial) de cada  $\mathcal{Cacti}(n)$  de manera sencilla (y eficiente). Esto permite implementar el operad computacionalmente como se describe en el apéndice B. Por ejemplo, si se quiere calcular el borde de (121341656761) se puede aplicar la “receta” dada por la definición original sin pensar de qué manera se escribe como composición de generadores. Desde ese punto de vista, vale destacar el valor fórmula cerrada del trabajo de [BF04]. Si bien es cierto que definir el borde de manera mínima en los generadores (de la manera además natural que decís) es más económica y elegante desde un punto de vista abstracto.

## 2.4. El complejo de Hochschild

Por último, mostraremos brevemente el ejemplo emblemático (y que da origen al concepto [GV95]) de  $\mathcal{Cacti}$ -álgebra: el complejo de Hochschild.

Sea  $A$  un álgebra asociativa. Denotemos por  $C^\bullet(A)$  y  $H^*(A)$  a su complejo y cohomología de Hochschild respectivamente. En el trabajo seminal [Ger63], el autor identifica el producto *cup* (componer con el producto del álgebra)

$$(f \smile g)(a_1, \dots, a_{p+q}) = f(a_1, \dots, a_p)g(a_{p+1}, \dots, a_{p+q}),$$

y la operación pre-Lie de cocadenas en el complejo de Hochschild:

$$f * g = \sum_{i=1}^p f \circ_i g = \sum_{i=1}^p f(\dots, \underbrace{g(\dots)}_{i\text{-ésimo lugar}}, \dots)$$

(donde  $f : A^{\otimes p} \rightarrow A$ ,  $g : A^{\otimes q} \rightarrow A$ ).

Estas operaciones, al pasar a la cohomología dan lugar a lo que posteriormente se denominó un álgebra de Gerstenhaber. En [GV95] los autores consideran las operaciones *brace* en el complejo de Hochschild.

$$f\{g_1, \dots, g_m\} = \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n} f(\dots, g_1, \dots, g_m, \dots)$$

donde  $g_j$  está insertada en la entrada  $i_j$ -ésima de  $f$ . Las mismas son una generalización de la operación pre-Lie anterior ya que ésta es  $f\{g\}$ .

Al operad que axiomatiza estas operaciones (el producto cup y las braces) lo llamaremos  $\mathcal{GV}$ , el operad de Gerstenhaber y Voronov.

**Definición 2.11.** El operad d.g.  $\mathcal{GV}$  que axiomatiza las álgebras de Gerstenhaber y Voronov [GV95] está generado por

$$M_2 = \cup \in \mathcal{GV}(2), |M_2| = -1 \quad y \quad M_{1,n} = \{\dots\}_n \in \mathcal{GV}(n+1), |M_{1,n}| = 0$$

tomamos como definición de grado al llamado  $|\cdot| = deg - 1$  en [GV95]. En el ejemplo del complejo de Hochschild este grado  $deg(f) = r$  para  $f : A^{\otimes r} \rightarrow A$ . O sea, en la definición se considera el grado desuspendido del homológico. Estos generadores están sujetos a ciertas relaciones. Para explicar estas relaciones de manera más clara, diremos cuándo un espacio d.g.  $V$  es una  $\mathcal{GV}$ -álgebra. Por una parte,  $M_2$  da lugar a un producto asociativo compatible con el diferencial, esto es,  $\partial \cup = 0$ . En otras palabras, el producto  $\cup$  hace de  $V$  un álgebra d.g. Por otra parte, las  $M_{1,n}$  determinan en  $V$  lo que se llama una estructura de álgebra de *brace*, es decir, cumplen

$$x\{x_1, \dots, x_m\}\{y_1, \dots, y_n\} = \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n} (-1)^\alpha x\{y_1, \dots, y_{i_1}, x_1\{y_{i_1+1}, \dots\}, \dots, y_{i_m}, x_m\{y_{i_m+1}, \dots\}, \dots, y_n\}$$

(donde  $\alpha := \sum_{p=1}^m |x_p| \sum_{q=1}^{i_p} |y_q|$  es el signo de Koszul de la expresión). Además, el producto y las braces verifican la siguiente compatibilidad

$$(x_1 \cup x_2)\{y_1, \dots, y_n\} = \sum_{k=0}^n (-1)^\beta x_1\{y_1, \dots, y_k\} \cup x_2\{y_{k+1}, \dots, y_n\},$$

(aquí el signo de Koszul es  $\beta = (|x_2| + 1) \sum_{p=1}^k |y_p|$ ). Por último, el diferencial de las braces está dado por

$$\begin{aligned} (\partial M_{1,n})(x, x_1, \dots, x_n) = & - (-1)^{(|x|+1)|x_1|} x_1 \cdot x\{x_2, \dots, x_{n+1}\} \\ & - (-1)^{|x|} \sum_{i=1}^n (-1)^{|x_1|+\dots+|x_i|} x\{x_1, \dots, x_i \cdot x_{i+1}, \dots, x_{n+1}\} \\ & + (-1)^{|x|+|x_1|+\dots+|x_n|} x\{x_1, \dots, x_n\} \cdot x_{n+1} \end{aligned}$$

Dado que esta última identidad la utilizaremos más adelante, la reescribimos como

$$M_{1,n} = -(M_2 \circ_2 M_{1,n-1})^{(12)} + M_2 \circ_1 M_{1,n-1} - \sum_{j=2}^{n-1} M_{1,n-1} \circ_j M_2$$

El siguiente lema, nos dice que  $\mathcal{GV}$  y  $\mathcal{Cacti}$  axiomatizan esencialmente la misma estructura algebraica (esto es, a menos de convención en la graduación).

**Lema 2.12.** *Los operads  $\mathcal{GV}$  y  $\mathcal{Cacti}$  axiomatizan las mismas álgebras a menos de grado. Más precisamente, un espacio (d.g.)  $V$  es un álgebra sobre  $\mathcal{GV}$  si y sólo si  $\Sigma V$  lo es sobre  $\mathcal{Cacti}$  al identificar*

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \leftrightarrow M_2 \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \leftrightarrow M_{1,n-1}$$

*Demostración.* La demostración consiste sencillamente en verificar que las relaciones que definen una  $\mathcal{GV}$  álgebra en  $\Sigma^{-1}V$  dan lugar a las que definen una  $\mathcal{Cacti}$  álgebra en  $V$ . Podemos escribir un elemento (homogéneo)  $v \in \Sigma^{-1}V$  como  $\flat v$  donde el símbolo  $\flat$  tiene grado (menos) uno y  $v$  el grado original en  $V$ . A modo de ejemplo, verifiquemos la identidad de brace. Si,  $\Sigma^{-1}V$  es un álgebra sobre  $\mathcal{GV}$ , se tiene

$$\flat x \{ \flat x_1, \dots, \flat x_{m-1} \} \{ \flat' y_1, \dots, \flat' y_{n-1} \} = \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{m-1} \leq n-1} (-1)^\alpha \flat x \{ \flat y_1, \dots, \flat' y_{i_1}, \flat x_1 \{ \flat' y_{i_1+1}, \dots \}, \dots, \flat' y_{i_{m-1}}, \flat x_{m-1} \{ \flat' y_{i_{m-1}+1}, \dots \}, \dots, \flat' y_{n-1} \}$$

(donde  $\alpha := \sum_{p=1}^{m-1} (|x_p| - 1) \sum_{q=1}^{i_p} (|y_q| - 1)$ ). La misma identidad, la escribimos una identidad de operaciones

$$\flat \cdot \{ \flat_1 \cdot, \dots, \flat_{m-1} \cdot \} \{ \flat'_1 \cdot, \dots, \flat'_{n-1} \cdot \} = \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{m-1} \leq n-1} \pm \flat \cdot \{ \flat_1 \cdot, \dots, \flat'_{i_1} \cdot, \flat_1 \cdot \{ \flat'_{i_1+1} \cdot, \dots \}, \dots, \flat'_{i_{m-1}} \cdot, \flat_{m-1} \cdot \{ \flat'_{i_{m-1}+1} \cdot, \dots \}, \dots, \flat'_{n-1} \cdot \}$$

donde ahora el signo es el de la permutación de los símbolos  $\flat$  y  $\flat'$ . (La identidad anterior se recupera al evaluar en  $(x, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ .) En  $\mathcal{Cacti}$  esta relación se corresponde justamente con la que se tiene entre los generadores  $B_m$  y  $B_n$  (vista en la sección anterior):

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} = \sum_{\text{posibilidades}} \pm \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array}$$

Recordemos que el signo es el de la permutación de los puntos de  $B_n$  y  $B_m$  al leerlos en sentido antihorario desde la raíz (ver 2.7) y, de esta manera, coinciden con el de la permutación de los  $b$  y  $b'$ .

La verificación de las demás relaciones es análoga. □

Este lema, en combinación con la observación 1.11, dice que  $\mathcal{Cacti} = \Sigma\mathcal{GV}$ . De esta manera, tenemos un diccionario entre ambos conceptos.

Volviendo al complejo de Hochschild, se puede ahora traducir el resultado clásico de [GV95] en el lenguaje de álgebras de cactus. Es decir,  $C^\bullet(A)$  es una  $\mathcal{Cacti}$ -álgebra (considerando el grado homológico) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Cacti} &\rightarrow s\mathcal{E}nd(C^\bullet(A)) \\
 \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} &= (1, 2) \mapsto \text{cup} \\
 \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \textcircled{3} \end{array} &= (1, 2, 1) \mapsto * \text{ (operación pre-Lie)} \\
 \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \textcircled{2} \end{array} &= (1, 2, 1, 3, 1, \dots, 1, n, 1) \mapsto n\text{-brace}
 \end{aligned}$$

En este contexto, el teorema 3.8 dice que la simetrización del producto cup es asociativa a menos de homotopía en el sentido operádico. De acuerdo a lo visto en la sección 1.3, tenemos un morfismo explícito

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}ss_\infty &\rightarrow s\mathcal{E}nd(C^\bullet(A)) \\
 m_2 &\mapsto \text{cup} + \text{cup}^{(1 \leftrightarrow 2)}
 \end{aligned}$$

Por otra parte, en el capítulo 4 vemos que este ejemplo posee la propiedad de compatibilidad con el grado allí estudiada. Obtenemos entonces (ver teorema 4.16) que si  $H$  es una biálgebra (d.g.) unitaria y counitaria, las posibles estructuras de  $H$ -módulo álgebra de  $A$  están en correspondencia uno a uno con los morfismos (de álgebras de cactus)  $\Omega H \rightarrow C^\bullet(A)$ .

## 2.5. Álgebras tridendriformes y de cactus

El objetivo de esta sección es mostrar que toda álgebra tridendriforme d.g. (ver definición 2.21) es una *Cacti* álgebra. Esto generaliza el trabajo de [Ron00, BR10] en el caso no graduado. El estudio de este problema surge a partir de comentarios de M. Ronco sobre una versión preliminar de esta monografía. El resultado obtenido que relaciona *Cacti* y  $t\mathcal{D}$  (ver 2.21) es el siguiente:

**Teorema 2.13.** *Se tiene un morfismo de operads (d.g.)  $Cacti \rightarrow t\mathcal{D}$ . Es decir, toda álgebra  $(q = 0)$ -tridendriforme (d.g.) es una *Cacti*-álgebra.*

En realidad, obtenemos un resultado similar. Consideramos el operad  $\mathcal{K}$  (ver definición 2.14) y vemos que existe un morfismo de operads (d.g.)  $\mathcal{G}\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{K}$ . Ya hemos visto que  $Cacti = \Sigma\mathcal{G}\mathcal{V}$  y de manera análoga (esto es, a partir de los argumentos de la observación 1.11) se tiene  $t\mathcal{D} = \Sigma\mathcal{K}$ .

El morfismo  $Cacti \rightarrow \mathcal{K}$  es esencialmente (ver definición 2.15) el definido en [Ron00, BR10] para el caso no graduado. Vemos en la definición que el mismo sigue siendo válido como morfismo en el caso graduado y verificamos la compatibilidad con el diferencial (ver lema 2.16).

Comencemos definiendo, basándonos en [Cha02, sec. 3] el operad  $\mathcal{K}$  y la descripción de las álgebras sobre éste.

**Definición 2.14.** El operad (d.g.)  $\mathcal{K}$  [Cha02, 3.2] está generado por tres operaciones binarias  $\triangleright, \triangleleft$  y  $\bullet$  con  $|\bullet| = 1, |\triangleright| = |\triangleleft| = 0$ , sujetos a las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned}
 \triangleleft \circ_1 \triangleright &= \triangleright \circ_2 \triangleleft \\
 \triangleleft \circ_1 \triangleleft &= \triangleleft \circ_2 \triangleleft + \triangleleft \circ_2 \triangleright \\
 \triangleright \circ_2 \triangleright &= \triangleright \circ_1 \triangleright + \triangleright \circ_1 \triangleleft \\
 \triangleleft \circ_1 \bullet &= \bullet \circ_2 \triangleleft \\
 \bullet \circ_1 \triangleright &= \triangleright \circ_2 \bullet \\
 \bullet \circ_1 \triangleleft &= \bullet \circ_2 \triangleright \\
 \bullet \circ_1 \bullet &= -\bullet \circ_2 \bullet
 \end{aligned}$$

Se define el diferencial a partir de  $\partial\triangleleft = \bullet = -\partial\triangleright$  y en consecuencia  $\partial\bullet = 0$ .

Dar una estructura de  $\mathcal{K}$ -álgebra en un espacio d.g.  $(V, d)$  consiste en determinar la acción de las operaciones binarias  $\triangleright$ ,  $\triangleleft$  y  $\bullet$  de manera que se satisfagan para todo  $x, y, z \in V$  (c.f. [Cha02, def. 3])

$$\begin{aligned}
(x \triangleright y) \triangleleft z &= x \triangleright (y \triangleleft z) \\
(x \triangleleft y) \triangleleft z &= x \triangleleft (y \triangleleft + \triangleright z) \\
x \triangleright (y \triangleright z) &= (x \triangleleft + \triangleright y) \triangleright z \\
(x \bullet y) \triangleleft z &= x \bullet (y \triangleleft z) \\
(x \triangleright y) \bullet z &= x \triangleright (y \bullet z) \\
(x \triangleleft y) \bullet z &= (-1)^{|y|} x \bullet (y \triangleright z) \\
(x \bullet y) \bullet z &= x \bullet (y \bullet z)
\end{aligned}$$

Donde la condición de compatibilidad con el diferencial es

$$\begin{aligned}
d(x \triangleleft y) - dx \triangleleft y - (-1)^{|x|} x \triangleleft dy &= (-1)^{|x|} x \bullet y \\
d(x \triangleright y) - dx \triangleright y - (-1)^{|x|} x \triangleright dy &= (-1)^{|x|+1} x \bullet y \\
d(x \bullet y) - dx \bullet y - (-1)^{|x|+1} x \bullet dy &= 0
\end{aligned}$$

Veamos ahora que toda  $\mathcal{K}$ -álgebra es un álgebra de  $\mathcal{GV}$ . Para esto adaptamos la definición dada por [Ron00] de la construcción de las imágenes de las operaciones  $M_{1,n}$  a partir de las operaciones  $\triangleright$  y  $\triangleleft$ . Con lo visto en 1.8 en mente, el procedimiento es escribir la definición original en lenguaje operádico y tomarla como definición para el caso graduado.

**Definición 2.15.** Se define el morfismo de operads (basándonos en [Ron00]).

$$\begin{aligned}
\mathcal{GV} &\rightarrow \mathcal{K} \\
M_2 &\mapsto \mathcal{M}_2 := \bullet \\
M_{1,n} &\mapsto \mathcal{M}_{1,n}
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{M}_{1,n} := \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \left( \underbrace{(2 \triangleleft (3 \triangleleft \dots (i-1 \triangleleft i)))}_{i-1 \text{ entradas}} \triangleright 1 \right) \triangleleft \left( \underbrace{(((i+1 \triangleright i+2) \dots \triangleright n) \triangleright n+1)}_{n-i+1 \text{ entradas}} \right)$$

(donde  $1, \dots, n+1$  indican el lugar de inserción de cada argumento.)

De manera equivalente, llamando

$$\begin{aligned}\diamond &:= (\triangleleft \circ_1 \triangleright)^{(12)} = (\triangleright \circ_2 \triangleleft)^{(12)} \\ \omega_{\triangleright}^k &:= (((\cdot \triangleright \cdot) \dots \triangleright \cdot) \triangleright \cdot) = \triangleright \circ_1 \omega_{\triangleright}^{k-1} \in \mathcal{K}(k) \\ \omega_{\triangleleft}^k &:= (\cdot \triangleleft (\cdot \triangleleft \dots (\cdot \triangleleft \cdot))) = \triangleleft \circ_2 \omega_{\triangleleft}^{k-1} \in \mathcal{K}(k)\end{aligned}$$

(considerando  $\omega_{\triangleleft}^2 = \triangleleft$ ;  $\omega_{\triangleright}^2 = \triangleright$ ,  $\omega_{\triangleright}^1 = id = \omega_{\triangleleft}^1$ ),  $\mathcal{M}_{1,n}$  se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{1,n} &= (-1)^n \triangleleft \circ_2 \omega_{\triangleright}^n + \triangleright^{(12)} \circ_2 \omega_{\triangleleft}^n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} (\diamond \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i) \circ_{i+1} \omega_{\triangleright}^{n-i}\end{aligned}$$

Vale mencionar (aunque no lo utilizaremos) que si un espacio d.g.  $V$  es una  $\mathcal{K}$ -álgebra, para elementos  $x, y_1, \dots, y_n \in V$ , la fórmula es

$$\mathcal{M}_{1,n}(x, y_1, \dots, y_n) =$$

$$= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i+\varepsilon} \left( (y_1 \triangleleft (y_2 \triangleleft \dots (y_{i-2} \triangleleft y_{i-1}))) \triangleright x \right) \triangleleft (((y_i \triangleright y_i + 1) \dots \triangleright y_{n-1}) \triangleright y_n)$$

donde  $\varepsilon = |x| \left( \sum_{j=1}^{i-1} |y_j| \right)$  es el signo de Koszul de intercambiar  $x, y_1, \dots, y_{i-1}$ .

La expresión original de [Ron00, BR10] se recupera en el caso de  $V$  trivialmente graduado.

**Lema 2.16.** *El morfismo es de operads d.g.*

*Demostración.* Si bien los resultados de [Ron00, BR10] son para el caso no graduado, el hecho de que las operaciones  $\triangleright$  y  $\triangleleft$  sean de grado 0 (y éstas sean las que tienen mayor protagonismo en las identidades a verificar) permite reutilizar las demostraciones incluidas en estos artículos para probar que  $\mathcal{M}_{1,n}$  cumplen la identidad brace (ver [Ron00, 5]) y la compatibilidad entre éstas y  $\mathcal{M}_2$  (ver [BR10, 2.2] para el caso  $q = 0$ ). De esta manera, sólo queda verificar que el morfismo es compatible con el diferencial.

Calculemos primero los bordes de las operaciones  $\diamond, \omega_{\triangleleft}, \omega_{\triangleright}$

(i) En primer lugar, es inmediato a partir de la definición de  $\diamond$  que

$$\partial\diamond = \mathcal{M}_2 \circ_1 \triangleright^{(12)} - \triangleleft \circ_1 \mathcal{M}_2^{(12)} = \mathcal{M}_2 \circ_1 \triangleright^{(12)} - (\mathcal{M}_2 \circ_2 \triangleleft)^{(12)}$$

(ii) Se tiene  $\partial\omega_{\triangleright}^k = -\sum_{j=1}^{k-1} \omega_{\triangleright}^{k-1} \circ_j \mathcal{M}_2$ :

$$\begin{aligned} \partial\omega_{\triangleright}^{k+1} &= \partial(\triangleright \circ_1 \omega_{\triangleright}^k) \\ &= (\partial\triangleright) \circ_1 \omega_{\triangleright}^k + \triangleright \circ_1 \partial\omega_{\triangleright}^k \\ &= -\mathcal{M}_2 \circ_1 \omega_{\triangleright}^k - \triangleright \circ_1 \sum_{j=1}^{k-1} \omega_{\triangleright}^{k-1} \circ_j \mathcal{M}_2 \\ &= -(\omega_{\triangleright}^k \circ_k \mathcal{M}_2 + \sum_{j=1}^{k-1} \omega_{\triangleright}^k \circ_j \mathcal{M}_2) \\ &= -\sum_{j=1}^k \omega_{\triangleright}^k \circ_j \mathcal{M}_2 \end{aligned}$$

(iii) Se tiene  $\partial\omega_{\triangleleft}^k = \sum_{j=1}^{k-1} \omega_{\triangleleft}^{k-1} \circ_j \mathcal{M}_2$ :

$$\begin{aligned} \partial\omega_{\triangleleft}^{k+1} &= \partial(\triangleleft \circ_2 \omega_{\triangleleft}^k) \\ &= (\partial\triangleleft) \circ_2 \omega_{\triangleleft}^k + \triangleleft \circ_2 \partial\omega_{\triangleleft}^k \\ &= \mathcal{M}_2 \circ_2 \omega_{\triangleleft}^k + \triangleleft \circ_2 \sum_{j=1}^{k-1} \omega_{\triangleleft}^{k-1} \circ_j \mathcal{M}_2 \\ &= \omega_{\triangleleft}^k \circ_1 \mathcal{M}_2 + \sum_{j=2}^k \omega_{\triangleleft}^k \circ_j \mathcal{M}_2 \\ &= \sum_{j=1}^k \omega_{\triangleleft}^k \circ_j \mathcal{M}_2 \end{aligned}$$

(iv) Ahora, calculemos términos que aparecen en  $\partial\mathcal{M}_{1,n}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 \circ_1 \triangleright^{(12)} \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i} &= ((\mathcal{M}_2 \circ_1 \triangleright^{(12)}) \circ_3 \omega_{\triangleright}^{n-i}) \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \\ &= ((\mathcal{M}_2 \circ_2 \omega_{\triangleright}^{n-i}) \circ_1 \triangleright^{(12)}) \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \\ &= ((\mathcal{M}_2 \circ_2 (\triangleright \circ_1 \omega_{\triangleright}^{n-i-1})) \circ_1 \triangleright^{(12)}) \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \\ &= (((\mathcal{M}_2 \circ_1 \triangleleft) \circ_2 \omega_{\triangleright}^{n-i-1}) \circ_1 \triangleright^{(12)}) \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \\ &= (\mathcal{M}_2 \circ_1 \diamond \circ_3 \omega_{\triangleright}^{n-i-1}) \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \\ &= \mathcal{M}_2 \circ_1 (\diamond \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i-1}) \end{aligned}$$

donde se utiliza la asociatividad de la definición de operad y el hecho  
 $\bullet \circ_2 \triangleright = \bullet \circ_1 \triangleleft$ .

(v) De manera análoga (usando la misma identidad, pero al revés) al item anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}_2 \circ_2 \triangleleft)^{(12)} \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i} &= ((\mathcal{M}_2 \circ_1 \omega_{\triangleleft}^i) \circ_{i+1} \triangleleft)^\sigma \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i} \\
&= (((\mathcal{M}_2 \circ_1 \triangleleft) \circ_3 \omega_{\triangleleft}^{i-1}) \circ_{i+1} \triangleleft)^\sigma \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i} \\
&= (((\mathcal{M}_2 \circ_2 \triangleright) \circ_3 \omega_{\triangleleft}^{i-1}) \circ_{i+1} \triangleleft)^\sigma \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i} \\
&= (\mathcal{M}_2 \circ_2 (\diamond \circ_2 \omega_{\triangleleft}^{i-1} \circ_{i+1} \omega_{\triangleright}^{n-i}))^{(12)}
\end{aligned}$$

(donde  $\sigma = (1, 2, 3, \dots, k, k+1, \dots, i, i+1)$ .)

(vi) Juntando los items dos anteriores con (i), obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \partial \diamond \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i} &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} (\mathcal{M}_2 \circ_1 \triangleright^{(12)} - (\mathcal{M}_2 \circ_2 \triangleleft)^{(12)}) \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i} \mathcal{M}_2 \circ_1 (\diamond \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-1-i}) \\
&+ \mathcal{M}_2 \circ_1 (\triangleright^{(12)} \circ_2 \omega_{\triangleleft}^{n-1}) \\
&- \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i} (\mathcal{M}_2 \circ_2 (\diamond \circ_2 \omega_{\triangleleft}^{i-1} \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i}))^{(12)} \\
&- (-1)^{n-1} (\mathcal{M}_2 \circ_2 \triangleleft)^{(12)} \circ_3 \omega_{\triangleright}^{n-1} \\
&= -\mathcal{M}_2 \circ_1 \mathcal{M}_{1,n-1} - (-1)^{n-1} \mathcal{M}_2 \circ_1 (\triangleleft \circ_2 \omega_{\triangleright}^{n-1}) \\
&+ (\mathcal{M}_2 \circ_2 \mathcal{M}_{1,n-1})^{(12)} - (\mathcal{M}_2 \circ_2 (\triangleright^{(12)} \circ_2 \omega_{\triangleleft}^{n-1}))^{(12)}
\end{aligned}$$

Ahora, a partir de

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}_2 \circ_2 (\triangleright^{(12)} \circ_2 \omega_{\triangleleft}^{n-1}))^{(12)} &= (\mathcal{M}_2 \circ_2 \triangleright^{(12)}) \circ_3 \omega_{\triangleleft}^{n-1})^{(12)} \\
&= ((\mathcal{M}_2 \circ_1 \triangleleft)^{(13)} \circ_3 \omega_{\triangleleft}^{n-1})^{(12)} \\
&= \mathcal{M}_2^{(12)} \circ_2 \omega_{\triangleleft}^n \\
\mathcal{M}_2 \circ_1 (\triangleleft \circ_2 \omega_{\triangleright}^{n-1}) &= (\mathcal{M}_2 \circ_1 \triangleleft) \circ_3 \omega_{\triangleright}^{n-1} \\
&= (\mathcal{M}_2 \circ_2 \triangleright) \circ_3 \omega_{\triangleright}^{n-1} \\
&= \mathcal{M}_2 \circ_2 \omega_{\triangleright}^n
\end{aligned}$$

concluimos (volviendo a la ecuación anterior) que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \diamond \circ_2 w_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} w_{\triangleright}^{n-i} + \mathcal{M}_2^{(12)} \circ_2 \omega_{\triangleleft}^n + (-1)^n \mathcal{M}_2 \circ_2 \omega_{\triangleright}^n = \\ & = (\mathcal{M}_2 \circ_2 \mathcal{M}_{1,n-1})^{(12)} - \mathcal{M}_2 \circ_1 \mathcal{M}_{1,n-1} \end{aligned}$$

(vii) Utilizando los items (ii) y (iii), veamos la relación entre los términos de  $\partial \mathcal{M}_{1,n}$  donde aparecen  $\partial \omega_{\triangleleft}$  y  $\partial \omega_{\triangleright}$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \diamond \circ_2 (\partial w_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} w_{\triangleright}^{n-i} + w_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \partial w_{\triangleright}^{n-i}) = \\ & = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \left( \diamond \circ_2 \left( \sum_{j=1}^{i-1} \omega_{\triangleleft}^{i-1} \circ_j \mathcal{M}_2 \right) \circ_{i+2} w_{\triangleright}^{n-i} \right. \\ & + \left. \diamond \circ_2 w_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \left( - \sum_{j=1}^{n-i-1} \omega_{\triangleright}^{n-i-1} \circ_j \mathcal{M}_2 \right) \right) \\ & = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^i (-1)^{n-i-1} \left( \diamond \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} w_{\triangleright}^{n-i-1} \right) \circ_j \mathcal{M}_2 \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-i-1} (-1)^{n-i} \left( \diamond \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i-1} \right) \circ_j \mathcal{M}_2 \\ & = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-1-i} \left( \diamond \circ_2 w_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i-1} \right) \circ_j \mathcal{M}_2 \\ & = \sum_{j=2}^n \left( \mathcal{M}_{1,n-1} - (-1)^{n-1} \triangleleft \circ_2 \omega_{\triangleright}^{n-1} - \triangleright^{(12)} \circ_2 \omega_{\triangleleft}^{n-1} \right) \circ_j \mathcal{M}_2 \\ & = \left( \sum_{j=2}^{n-1} \mathcal{M}_{1,n-1} \circ_j \mathcal{M}_2 \right) - (-1)^n \triangleleft \circ_2 \partial \omega_{\triangleright}^n - \triangleright^{(12)} \circ_2 \partial \omega_{\triangleleft}^n \end{aligned}$$

Ahora calculamos  $\partial\mathcal{M}_{1,n}$

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{M}_{1,n} &= \partial \left( (-1)^n \triangleleft \circ_2 \omega_{\triangleright}^n + \triangleright^{(12)} \circ_2 \omega_{\triangleleft}^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \diamond \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i} \right) \\
&= (-1)^n \mathcal{M}_2 \circ_2 \omega_{\triangleright}^n + (-1)^n \triangleleft \circ_2 \partial\omega_{\triangleright}^n + \mathcal{M}_2^{(12)} \circ_2 \omega_{\triangleleft}^n + \triangleright^{(12)} \circ_2 \partial\omega_{\triangleleft}^n \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \left( \partial \diamond \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i} + \diamond \circ_2 \partial \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \omega_{\triangleright}^{n-i} + \diamond \circ_2 \omega_{\triangleleft}^i \circ_{i+2} \partial \omega_{\triangleright}^{n-i} \right) \\
&= (\mathcal{M}_2 \circ_2 \mathcal{M}_{1,n-1})^{(12)} - \mathcal{M}_2 \circ_1 \mathcal{M}_{1,n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} \mathcal{M}_{1,n-1} \circ_j \mathcal{M}_2
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos ver (a menos de un signo global que se resuelve al considerar  $\partial\triangleleft = \bullet = -\partial\triangleright$ ).  $\square$

## Un ejemplo de álgebra sobre $\mathcal{K}$

En este apartado, presentamos un ejemplo de álgebra sobre  $\mathcal{K}$ . El mismo consiste en el espacio de particiones (ordenadas) de conjuntos finitos (ordenados). Se trata de la versión d.g. del ejemplo [BR10, 1.2 b)]. A continuación, introducimos el espacio d.g.  $\Pi$ , siguiendo [Cha02, 1.1].

**Definición 2.17.** Sea  $\{i_1 < \dots < i_p\} \subset \mathbb{N}$  (un conjunto ordenado finito), al que le asignamos el símbolo  $\pi := i_1 \wedge \dots \wedge i_p$ . Llamemos  $|\pi| = \sharp\pi - 1 = p - 1$ . Notar que  $|\pi|$  coincide con la cantidad de símbolos  $\wedge$  en la expresión de  $\pi$ . Para  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos  $\Pi(n)$  el espacio vectorial generado por las particiones ordenadas de  $\{1, \dots, n\}$ . Esto se corresponde con las expresiones

$$\bar{\pi} = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r$$

donde cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  aparece en sólo uno de los  $\pi_j$ . Por ejemplo:

- Para  $n = 1$  sólo se tiene  $\bar{\pi} = 1$
- Para  $n = 2$ , las posibles particiones son

$$1 \wedge 2, \quad 1 \otimes 2, \quad 2 \otimes 1$$

- Para  $n = 3$  algunas posibilidades son

$$3 \otimes 1 \wedge 2, \quad 1 \otimes 3 \otimes 2, \quad 2 \wedge 3 \otimes 1, \quad 1 \wedge 2 \wedge 3$$

$\Pi$  será el espacio generado por todas las particiones ordenadas, esto es

$$\Pi := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Pi(n) = \langle \bar{\pi} : \bar{\pi} \text{ partición ordenada} \rangle$$

El grado de cada partición será

$$|\bar{\pi}| := \sum_{i=1}^r |\pi_i|$$

que coincide con la cantidad de símbolos  $\wedge$  en la expresión.

A partir de dos subconjuntos  $\pi' = i_1 \wedge \cdots \wedge i_p, \pi'' = i'_1 \wedge \cdots \wedge i'_q$  se puede considerar el único conjunto ordenado dado por la unión de ambos. Se quiere que esta operación recuerde el trabajo hecho al reordenar, así, se define

$$\pi' \wedge \pi'' := i_1 \wedge \cdots \wedge i_p \wedge i'_1 \wedge \cdots \wedge i'_q$$

Por ejemplo, si  $\pi' = 1 \wedge 3 \wedge 7$  y  $\pi'' = 2 \wedge 5$ , resultan

$$\begin{aligned} \pi' \wedge \pi'' &= 1 \wedge 3 \wedge 7 \wedge 2 \wedge 5 = -1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 5 \wedge 7 \\ \pi'' \wedge \pi' &= 2 \wedge 5 \wedge 1 \wedge 3 \wedge 7 = -1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 5 \wedge 7 \end{aligned}$$

Notar que se tiene en general

$$\pi' \wedge \pi'' = (-1)^{(|\pi'|+1)(|\pi''|+1)} \pi'' \wedge \pi'$$

Para concluir la definición, se da el diferencial en  $\Pi$  a partir de su valor en los generadores de la siguiente forma. Si  $\bar{\pi} = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ , se define

$$d(\bar{\pi}) = \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{|\pi_1| + \cdots + |\pi_j|} \pi_1 \otimes \cdots \otimes (\pi_j \wedge \pi_{j+1}) \otimes \cdots \otimes \pi_r$$

Notar que  $d$  es de grado  $+1$ , ya que se agrega un  $\wedge$  en cada término.

A modo de ejemplo, consideremos  $\bar{\pi} = 1 \wedge 3 \otimes 4 \otimes 2 \wedge 5$  y calculemos

$$\begin{aligned} d\bar{\pi} &= -1 \wedge 3 \wedge 4 \otimes 2 \wedge 5 - 1 \wedge 3 \otimes 4 \wedge 2 \wedge 5 \\ &= -1 \wedge 3 \wedge 4 \otimes 2 \wedge 5 + 1 \wedge 3 \otimes 2 \wedge 4 \wedge 5 \end{aligned}$$

Nos será útil tener, dadas dos particiones  $\bar{\pi}' \in \Pi(n), \bar{\pi}'' \in \Pi(m)$ , la partición que éstas definen en  $\Pi(n+m)$  al considerar los subconjuntos originales de

$\bar{\pi}'$  y los subconjuntos de  $\bar{\pi}''$  desfasados en  $n$ . Sean  $\bar{\pi}' = \pi'_1 \otimes \cdots \otimes \pi'_r$  y  $\bar{\pi}'' = \pi''_1 \otimes \cdots \otimes \pi''_s$ . Si  $\pi''_j = i_1 \wedge \cdots \wedge i_p$ , llamaremos  $\hat{\pi}'' := i_1 + n \wedge \cdots \wedge i_p + n$ . Se define en consecuencia

$$\bar{\pi}' \otimes \hat{\pi}'' = \pi'_1 \otimes \cdots \otimes \pi'_r \otimes \hat{\pi}''_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\pi}''_{r+s}$$

Así, por ejemplo si  $\bar{\pi}' = 1 \wedge 3 \otimes 4 \otimes 2 \wedge 5$  y  $\bar{\pi}'' = 2 \wedge 3 \otimes 1 \wedge 4$ , resulta

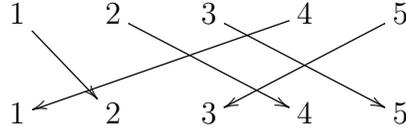
$$\bar{\pi}' \wedge \hat{\pi}'' = 1 \wedge 3 \otimes 4 \otimes 2 \wedge 5 \otimes 7 \wedge 8 \otimes 6 \wedge 9$$

A continuación introducimos el concepto de *shuffle*. Un shuffle es un tipo de permutación mezcla manteniendo el orden dentro de distintos bloques.

**Definición 2.18.** Sean  $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$ ,  $n = \sum k_i$ . Un  $k_1, \dots, k_p$ -shuffle es una permutación  $\sigma \in S_n$  tal que

$$\begin{aligned} \sigma(1) &< \dots < \sigma(k_1) \\ \sigma(k_1 + 1) &< \dots < \sigma(k_1 + k_2) \\ &\vdots \\ \sigma(k_1 + \dots + k_{p-1} + 1) &< \dots < \sigma(n) \end{aligned}$$

Llamaremos  $\text{Sh}(k_1, \dots, k_p)$  al conjunto de los  $k_1, \dots, k_p$ -shuffles. Así, por ejemplo,



es un 3, 2-shuffle.

También utilizaremos los siguientes subconjuntos de  $r, s$ -shuffles:

$$\begin{aligned} \text{Sh}^\triangleright(r, s) &= \{\sigma \in \text{Sh} : \sigma(r + s) = r + s\} \\ \text{Sh}^\triangleleft(r, s) &= \{\sigma \in \text{Sh} : \sigma(r) = r + s\} \\ \text{Sh}^\bullet(r, s) &= \{\sigma \in \text{Sh} : \sigma(r) = r + s - 1, \sigma(r + s) = r + s\} \end{aligned}$$

**Observación 2.19.** Es inmediato de la definición que para todo  $\tau \in \text{Sh}(r, s, t)$ , se tienen únicos  $\sigma \in \text{Sh}(r, s)$ ,  $\omega \in \text{Sh}(r + s, t)$ ,  $\gamma \in \text{Sh}(r, s + t)$  y  $\delta \in \text{Sh}(s, t)$  tales que

$$\tau = \sigma\omega = \delta\gamma$$

(donde  $\sigma$  y  $\delta$  se piensan como la identidad sobre los elementos en los que no están definidas). Esto da una correspondencia entre los pares  $(\sigma, \omega)$  y  $(\gamma, \delta)$ .

**Proposición 2.20.** *Se tiene en  $\Pi$  una estructura de  $\mathcal{K}$  álgebra dada por (llamamos  $\bar{\pi} = \bar{\pi}' \otimes \hat{\bar{\pi}}''$ )*

$$\begin{aligned}\bar{\pi}' \triangleright \bar{\pi}'' &= \sum_{\sigma \in \text{Sh}^{\triangleright}(r,s)} (-1)^{\epsilon_{\sigma}} \pi_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\sigma^{-1}(r+s)} \\ \bar{\pi}' \triangleleft \bar{\pi}'' &= \sum_{\sigma \in \text{Sh}^{\triangleleft}(r,s)} (-1)^{\epsilon_{\sigma}} \pi_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\sigma^{-1}(r+s)} \\ \bar{\pi}' \bullet \bar{\pi}'' &= \sum_{\sigma \in \text{Sh}^{\bullet}(r,s)} (-1)^{\nu + \epsilon_{\sigma}} \pi_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{r=\sigma^{-1}(r+s-1)} \wedge \pi_{r+s=\sigma^{-1}(r+s)}\end{aligned}$$

En la fórmula,  $\epsilon_{\sigma}$  es el signo de Koszul de intercambiar los  $\bar{\pi}_i$  según  $\sigma$  y  $\nu := |\pi''_1| + \dots + |\pi''_{s-1}| + 1 = |\bar{\pi}''| - |\pi''_s| + 1$ .

Antes de la demostración, ilustremos con unos ejemplos las operaciones recién definidas. Sea  $\bar{\pi}' = 1 \wedge 3 \otimes 2$  y  $\bar{\pi}'' = 2 \otimes 1$ , luego  $\bar{\pi} = 1 \wedge 3 \otimes 2 \otimes 5 \otimes 4$  y se tiene entonces

$$\begin{aligned}\bar{\pi} \triangleright \bar{\pi}' &= 1 \wedge 3 \otimes 2 \otimes 5 \otimes 4 + 1 \wedge 3 \otimes 5 \otimes 2 \otimes 4 + 5 \otimes 1 \wedge 3 \otimes 2 \otimes 4 \\ \bar{\pi} \triangleleft \bar{\pi}' &= 1 \wedge 3 \otimes 5 \otimes 4 \otimes 2 + 5 \otimes 1 \wedge 3 \otimes 4 \otimes 2 + 5 \otimes 4 \otimes 1 \wedge 3 \otimes 2 \\ \bar{\pi} \bullet \bar{\pi}' &= -1 \wedge 3 \otimes 5 \otimes 2 \wedge 4 - 5 \otimes 1 \wedge 3 \otimes 2 \wedge 4\end{aligned}$$

*Demostración.* Veamos primero que  $d \triangleright = -\bullet$ . Para esto, calculamos

$$d(\bar{\pi}' \triangleright \bar{\pi}'') = \sum_{i=1}^{r+s-1} \sum_{\sigma \in \text{Sh}^{\triangleright}(r,s)} (-1)^{\alpha_{i,\sigma}} \pi_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\sigma^{-1}(i)} \wedge \pi_{\sigma^{-1}(i+1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\sigma^{-1}(r+s)}$$

donde  $\alpha_{i,\sigma} = \epsilon_{\sigma} + |\pi_{\sigma^{-1}(1)}| + \dots + |\pi_{\sigma^{-1}(i)}|$ . Ahora bien, si  $\sigma^{-1}(i) \leq r$  y  $r < \sigma^{-1}(i+1) < r+s$  (es decir, un índice corresponde a un subconjunto de  $\bar{\pi}'$  y el otro a  $\bar{\pi}''$ ) en la suma se tiene un término hermano dado por  $\sigma' = \sigma(i, i+1)$ . Notar que éstos términos se cancelan ya que

$$\begin{aligned}\alpha_{i,\sigma} - \alpha_{i,\sigma'} &= \epsilon_{\sigma} - \epsilon_{\sigma'} + |\pi_{\sigma^{-1}(i)}| - |\pi_{\sigma^{-1}(i+1)}| \\ &\equiv |\pi_{\sigma^{-1}(i)}| |\pi_{\sigma^{-1}(i+1)}| + |\pi_{\sigma^{-1}(i)}| - |\pi_{\sigma^{-1}(i+1)}| && \text{(mód 2)} \\ &\equiv (|\pi_{\sigma^{-1}(i)}| + 1)(|\pi_{\sigma^{-1}(i+1)}| + 1) + 1 && \text{(mód 2)}\end{aligned}$$

pero en un término se encuentra el factor  $\pi_{\sigma^{-1}(i)} \wedge \pi_{\sigma^{-1}(i+1)}$  y en el otro  $\pi_{\sigma^{-1}(i+1)} \wedge \pi_{\sigma^{-1}(i)}$  compensando el signo (ver 2.17).

Se tiene entonces, al descartar de la suma los términos que se cancelan,

$$\begin{aligned}
d(\bar{\pi}' \triangleright \bar{\pi}'') &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Sh}^\triangleright(r,s) \\ 1 \leq i < r+s \\ \sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i) < r}} (-1)^{\alpha_{i,\sigma}} \bar{\pi}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\sigma^{-1}(i)} \wedge \pi_{\sigma^{-1}(i+1)} \otimes \dots \otimes \bar{\pi}_{r+s} \\
&+ \sum_{\substack{\sigma \in \text{Sh}^\triangleright(r,s) \\ 1 \leq i < r+s \\ \sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i) > r}} (-1)^{\alpha_{i,\sigma}} \bar{\pi}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\sigma^{-1}(i)} \wedge \pi_{\sigma^{-1}(i+1)} \otimes \dots \otimes \bar{\pi}_{r+s} \\
&+ \sum_{\sigma \in \text{Sh}^\bullet(r,s)} (-1)^{\alpha_{r,\sigma}} \bar{\pi}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \bar{\pi}_r \wedge \bar{\pi}_{r+s} \\
&= d\bar{\pi}' \triangleright \bar{\pi}'' + (-1)^{|\bar{\pi}'|} \bar{\pi}' \triangleright d\bar{\pi}'' - (-1)^{|\bar{\pi}'|} \bar{\pi}' \bullet \bar{\pi}''
\end{aligned}$$

De manera similar puede verse que se cumple  $d\triangleleft = \bullet$ .

Veamos ahora que se satisfacen las relaciones que involucran  $\triangleright$  y  $\triangleleft$ . Para hacer más sencilla la lectura, llamemos, como antes,  $\bar{\pi} = \bar{\pi}' \otimes \bar{\pi}'' \otimes \bar{\pi}'''$ . Comencemos por el caso de la ecuación

$$(\bar{\pi}' \triangleright \bar{\pi}'') \triangleleft \bar{\pi}''' = \bar{\pi}' \triangleright (\bar{\pi}'' \triangleleft \bar{\pi}''')$$

El miembro de la izquierda es

$$\sum_{\substack{\sigma \in \text{Sh}^\triangleright(r,s) \\ \omega \in \text{Sh}^\triangleleft(r+s,t)}} (-1)^{\epsilon_\sigma + \epsilon_\omega} \pi_{\sigma^{-1}\omega^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\sigma^{-1}\omega^{-1}(r+s+t)}$$

(notar que de la extensión de  $\sigma$  como la identidad no introduce ambigüedad en los signos que ésta determina). Ahora, el segundo miembro es

$$\sum_{\substack{\delta \in \text{Sh}^\triangleright(s,t) \\ \gamma \in \text{Sh}^\triangleleft(r,s+t)}} (-1)^{\epsilon_\delta + \epsilon_\gamma} \pi_{\delta^{-1}\gamma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\delta^{-1}\gamma^{-1}(r+s+t)}$$

Ambos miembros pueden escribirse como una suma sobre ciertos  $\tau \in \text{Sh}(s, r, t)$ . Las  $\tau$  son las mismas en ambos miembros ya que, bajo la correspondencia dada por la observación 2.19, se tiene

$$\sigma \in \text{Sh}^\triangleright(r, s) \text{ y } \omega \in \text{Sh}^\triangleleft(r + s, t) \iff \delta \in \text{Sh}^\triangleleft(s, t) \text{ y } \gamma \in \text{Sh}^\triangleright(r, s + t)$$

De esta manera, la ecuación se satisface si  $\epsilon_\sigma + \epsilon_\omega \equiv \epsilon_\delta + \epsilon_\gamma \pmod{2}$ . Pero esto es inmediato ya que ambos coinciden con el signo análogamente definido para  $\tau$ , es decir,  $\epsilon_\tau = |\tau| + \kappa_\tau$ .

Veamos ahora la ecuación

$$(\bar{\pi}' \triangleleft \bar{\pi}'') \triangleleft \bar{\pi}''' = \bar{\pi}' \triangleleft (\bar{\pi}'' \triangleleft + \triangleright \bar{\pi}''')$$

A la izquierda se tiene

$$\sum_{\substack{\sigma \in \text{Sh}^\triangleleft(r,s) \\ \omega \in \text{Sh}^\triangleleft(r+s,t)}} (-1)^{\epsilon_\sigma + \epsilon_\omega} \pi_{\sigma^{-1}\omega^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\sigma^{-1}\omega^{-1}(r+s+t)}$$

y a la derecha

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\delta \in \text{Sh}^\triangleleft(s,t) \\ \gamma \in \text{Sh}^\triangleleft(r,s+t)}} (-1)^{\epsilon_\delta + \epsilon_\gamma} \pi_{\delta^{-1}\gamma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\delta^{-1}\gamma^{-1}(r+s+t)} \\ + & \sum_{\substack{\delta \in \text{Sh}^\triangleright(s,t) \\ \gamma \in \text{Sh}^\triangleleft(r,s+t)}} (-1)^{\epsilon_\delta + \epsilon_\gamma} \pi_{\delta^{-1}\gamma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\delta^{-1}\gamma^{-1}(r+s+t)} \\ = & \sum_{\substack{\delta \in \text{Sh}(s,t) \\ \gamma \in \text{Sh}^\triangleleft(r,s+t)}} (-1)^{\epsilon_\delta + \epsilon_\gamma} \pi_{\delta^{-1}\gamma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\delta^{-1}\gamma^{-1}(r+s+t)} \end{aligned}$$

ya que  $\text{Sh}^\triangleleft(s,t) \cup \text{Sh}^\triangleright(s,t) = \text{Sh}(s,t)$ . En este caso, la ecuación se sigue al percatarnos de que en la correspondencia mencionada antes (ver 2.19) vale

$$\sigma \in \text{Sh}^\triangleleft(r,s) \text{ y } \omega \in \text{Sh}^\triangleleft(r+s,t) \iff \delta \in \text{Sh}(s,t) \text{ y } \gamma \in \text{Sh}^\triangleleft(r,s+t)$$

El caso de la ecuación

$$(\bar{\pi}' \triangleleft + \triangleleft \bar{\pi}'') \triangleright \bar{\pi}''' = \bar{\pi}' \triangleright (\bar{\pi}'' \triangleright \bar{\pi}''')$$

es completamente análogo al anterior, a partir de que se tiene

$$\sigma \in \text{Sh}(r,s) \text{ y } \omega \in \text{Sh}^\triangleright(r+s,t) \iff \delta \in \text{Sh}^\triangleright(s,t) \text{ y } \gamma \in \text{Sh}^\triangleright(r,s+t)$$

En resumen, tenemos  $d\triangleleft = \bullet = -d\triangleright$ , sabemos que se satisfacen las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} \triangleleft \circ_1 \triangleright - \triangleright \circ_2 \triangleleft &= 0 \\ \triangleleft \circ_1 \triangleleft - \triangleleft \circ_2 \triangleleft - \triangleleft \circ_2 \triangleright &= 0 \\ \triangleright \circ_2 \triangleright - \triangleright \circ_1 \triangleright - \triangleright \circ_1 \triangleleft &= 0 \end{aligned}$$

y queremos ver las siguientes

$$\begin{aligned}
\underbrace{\bullet \circ_1 \triangleright - \triangleright \circ_2 \bullet}_{A} &= 0 \\
\underbrace{\bullet \circ_1 \triangleleft - \bullet \circ_2 \triangleright}_{B} &= 0 \\
\underbrace{\triangleleft \circ_1 \bullet - \bullet \circ_2 \triangleleft}_{C} &= 0 \\
\underbrace{\bullet \circ_1 \bullet + \bullet \circ_2 \bullet}_{D} &= 0
\end{aligned}$$

Ahora bien, al aplicar el diferencial a cada una de las ecuaciones del primer grupo (a partir de  $\bullet := d\triangleleft = -d\triangleright$ ) obtenemos

$$\begin{aligned}
A - C &= 0 \\
B + C &= 0 \\
A + B &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sólo hace falta verificar una de ellas. Por ejemplo,  $A$ :

$$(\bar{\pi}' \triangleright \bar{\pi}'') \bullet \bar{\pi}''' = \bar{\pi}' \triangleright (\bar{\pi}'' \bullet \bar{\pi}''')$$

En el primer término tenemos

$$\sum_{\substack{\sigma \in \text{Sh}^\triangleright(r,s) \\ \omega \in \text{Sh}^\bullet(r+s,t)}} (-1)^{\epsilon_\sigma + \epsilon_\omega + \nu} \pi_{\sigma^{-1}\omega^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{r+s} \wedge \pi_{r+s+t}$$

Por otra parte, se tiene de la derecha

$$\sum_{\substack{\delta \in \text{Sh}^\bullet(s,t) \\ \gamma \in \text{Sh}^\triangleright(r,s+t)}} (-1)^{\epsilon_\delta + \epsilon_\gamma + \nu} \pi_{\delta^{-1}\gamma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{r+s} \wedge \pi_{r+s+t}$$

Observemos que en ambos términos  $\nu = |\bar{\pi}'''| - |\pi_t'''| + 1$ . Como en los casos anteriores, se sigue la ecuación al ver que en la identificación de 2.19 se tiene

$$\sigma \in \text{Sh}^\triangleright(r,s) \text{ y } \omega \in \text{Sh}^\bullet(r+s,t) \iff \delta \in \text{Sh}^\bullet(s,t) \text{ y } \gamma \in \text{Sh}^\triangleright(r,s+t)$$

Por último, la ecuación que resta verificar es  $D = 0$ , pero  $D = dA$  y por lo tanto se verifica.  $\square$

## Traducción a *Cacti*

Para terminar la sección, definimos el operads  $t\mathcal{D}$  y traducimos el resultado obtenido a *Cacti*.

**Definición 2.21.** El operad (d.g.)  $t\mathcal{D}$  está generado por tres operaciones binarias  $\triangleright, \triangleleft$  y  $\bullet$  con  $|\triangleright| = |\triangleleft| = 1, |\bullet| = 0$ , sujetos a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \triangleleft \circ_1 \triangleright &= -\triangleright \circ_2 \triangleleft \\
 \triangleleft \circ_1 \triangleleft &= -\triangleleft \circ_2 \triangleleft - \triangleleft \circ_2 \triangleright \\
 \triangleright \circ_2 \triangleright &= -\triangleright \circ_1 \triangleright - \triangleright \circ_1 \triangleleft \\
 \bullet \circ_1 \triangleright &= \triangleright \circ_2 \bullet \\
 \triangleleft \circ_1 \bullet &= \bullet \circ_2 \triangleleft \\
 \bullet \circ_1 \triangleleft &= -\bullet \circ_2 \triangleright \\
 \bullet \circ_1 \bullet &= \bullet \circ_2 \bullet
 \end{aligned}$$

Con diferencial definido por  $\partial\triangleright = \bullet = -\partial\triangleleft$  y, luego,  $\partial\bullet = 0$ .

De esta manera, una estructura de álgebra sobre  $t\mathcal{D}$  en un espacio d.g.  $V$  consiste en determinar la acción de las operaciones binarias  $\triangleright, \triangleleft$  y  $\bullet$  de manera que se satisfagan para todo  $x, y, z \in V$

$$\begin{aligned}
 (x \triangleright y) \triangleleft z &= x \triangleright (y \triangleleft z) \\
 (x \triangleleft y) \triangleleft z &= x \triangleleft (y \triangleleft + \triangleright z) \\
 x \triangleright (y \triangleright z) &= (x \triangleleft + \triangleright y) \triangleright z \\
 (x \bullet y) \triangleleft z &= x \bullet (y \triangleleft z) \\
 (x \triangleright y) \bullet z &= x \triangleright (y \bullet z) \\
 (x \triangleleft y) \bullet z &= (-1)^{|y|+1} x \bullet (y \triangleright z) \\
 (x \bullet y) \bullet z &= x \bullet (y \bullet z)
 \end{aligned}$$

Donde la condición de compatibilidad con el diferencial es

$$\begin{aligned}
 (-1)^{|x|} d(x \triangleleft y) - (-1)^{|x|} dx \triangleleft y + x \triangleleft dy &= -x \bullet y \\
 d(x \triangleright y) - (-1)^{|x|} dx \triangleright y + x \triangleright dy &= x \bullet y \\
 d(x \bullet y) - dx \bullet y - (-1)^{|x|} x \bullet dy &= 0
 \end{aligned}$$

**Observación 2.22.** A partir de la definición anterior y la definición de  $\mathcal{K}$  (ver 2.14 se deduce que es equivalente dar una estructura de  $\mathcal{K}$ -álgebra en un espacio d.g.  $V$  a una estructura de  $t\mathcal{D}$ -álgebra en  $\Sigma V$ . En vistas de la observación 1.11 se tiene  $\Sigma\mathcal{K} = t\mathcal{D}$ .

El teorema 2.13, es decir, que toda álgebra sobre  $t\mathcal{D}$  es un álgebra de cactus, se obtiene al suspender el morfismo 2.15.

## 2.6. Álgebras de cactus simétricas

En este apartado recordamos la relación entre *álgebras braces* [LM05, def.1] y *álgebras de braces simétricas* [LM05, def.2]. A partir de esto, y gracias a comentarios de M. Ronco, proponemos una definición de álgebra de cactus simétrica: álgebras sobre el operad  $\mathcal{SymCacti}$  2.27.

Comencemos estableciendo lo conocido acerca de álgebras de braces y álgebras de braces simétricas. En cuanto a las primeras, éstas consisten en las álgebras axiomatizadas por el suboperad (no d.g.) de  $\mathcal{GV}$  generado por las operaciones  $M_{1,n}$  (ver 2.11, esto es

$$\langle M_{1,n} : n \in \mathbb{N} \rangle_{\text{operad}} \subset \mathcal{GV}$$

Las álgebras preLie, por otra parte, corresponden al suboperad (no d.g.) generado por la operación  $M_{1,1} \in \mathcal{GV}(2)$ . A partir del hecho  $\Sigma\mathcal{GV} = \mathcal{Cacti}$ , consideraremos los operads  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{P}$  definidos a continuación (que resultan las suspensiones de los recién mencionados).

**Definición 2.23.** El operad (no d.g.)  $\mathcal{B}$  se define como el suboperad de  $\mathcal{Cacti}$  generado en cada aridad (como espacio vectorial) por los cactus de dimensión máxima. En otras palabras, es el suboperad (no d.g.) generado (como operad no d.g.) por

$$\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{array}{c} \text{cactus con } n \text{ entradas y } 1 \text{ salida} \\ : n > 1 \end{array} \right\} \right\rangle_{\text{operad}} \subset \mathcal{Cacti}$$

Consideraremos también el suboperad de  $\mathcal{Cacti}$  generado por el cactus :

$$\mathcal{P} = \left\langle \begin{array}{c} \text{cactus con } 2 \text{ entradas y } 1 \text{ salida} \end{array} \right\rangle_{\text{operad}} \subset \mathcal{B}$$

Un álgebra sobre  $\mathcal{P}$  es un álgebra preLie (donde el producto es de grado 1).

**Observación 2.24.**  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{P}$  son las suspensiones de los suboperads de  $\mathcal{GV}$  generados por las operaciones brace y la operación preLie respectivamente.

Introducimos ahora la definición de álgebra de brace simétrica

**Definición 2.25.** Una álgebra de *brace simétrica* (c.f. [LM05, 2]) en un espacio d.g.  $V$  consiste en una colección de operaciones  $\{\langle \cdots \rangle_n : n \in \mathbb{N}\}$  de grado 0 y aridad  $n + 1$  tales que

- Para toda  $\sigma \in S_n$ , se tiene

$$x \langle x_1, \dots, x_n \rangle_n = \pm x \langle x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)} \rangle_n$$

donde  $\pm$  es el signo de Koszul correspondiente a intercambiar las  $x_i$ .

- Se cumple la siguiente identidad tipo braces:

$$x \langle x_1, \dots, x_m \rangle \langle y_1, \dots, y_n \rangle = \sum (-1)^\varepsilon x \langle x_1 \langle y_{i_1^1}, \dots, y_{i_{r_1}^1} \rangle, \dots, x_m \langle y_{i_1^m}, \dots, y_{i_{r_{m+1}}^m} \rangle y_{i_1^{m+1}}, \dots, y_{i_{r_{m+1}}^{m+1}} \rangle$$

donde la suma es sobre todas las elecciones

$$i_1^1 < \cdots < i_{r_1}^1, \dots, i_1^{m+1} < \cdots < i_{r_{m+1}}^{m+1}$$

(donde los  $r_j$  pueden ser nulos, en ese caso  $x_j \langle \rangle = x_j$ ) y el signo de cada término es el correspondiente al intercambio de las variables según la regla de Koszul.

Notar que la última identidad (al igual que en el caso de las álgebras de brace) dice que la operación  $\langle \cdot \rangle_1$  es preLie. Un hecho importante (que no ocurre en el caso de álgebras de braces) es que esta operación contiene toda la información de la estructura de brace simétrica. Más precisamente, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 2.26.** (c.f. [LM05, OG05]) *La estructura de álgebra de brace simétrica está determinada unívocamente por el producto preLie. Las operaciones de braces simétricas de mayor aridad quedan determinadas por  $\langle \cdot \rangle_1$ , la operación preLie, vía (c.f. [LR10, 5.2]):*

$$\langle \cdots \rangle_{n+1} = \langle \cdot \rangle_1 \circ_1 \langle \cdots \rangle_n - \sum_{1 < i \leq n+1} \langle \cdots \rangle_n \circ_i \langle \cdot \rangle_1$$

## Una propuesta de álgebras de cactus simétricas

Tenemos la siguiente situación (las inclusiones son de operads no d.g.)

$$\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{Cacti}$$

Observemos que todo  $\mathcal{Cacti}$  puede obtenerse a partir de  $\mathfrak{V}_1^1$  y los  $\mathfrak{V}_n^1$ . Es decir, si a  $\mathcal{B}$  le agregamos  $\mathfrak{V}_1^1$  obtenemos todo  $\mathcal{Cacti}$ . Definiremos  $\mathcal{SymCacti}$  como el suboperad (ahora sí d.g.) que se puede obtener a partir de  $\mathcal{P}$  agregando  $\mathfrak{V}_1^1$ . Esto es:

**Definición 2.27.** Definimos  $\mathcal{SymCacti}$  como el sub(dg)operad de  $\mathcal{Cacti}$

$$\mathcal{SymCacti} = \left\langle \mathfrak{V}_1^1, \mathfrak{V}_1^1 \right\rangle_{\text{operad}} \subset \mathcal{Cacti}$$

Como el diferencial se restringe bien, resulta un d.g. operad.

Llamaremos álgebra de cactus simétrica a un álgebra sobre  $\mathcal{SymCacti}$ .

La relación entre los operads que estamos estudiando se resume en el siguiente diagrama de inclusiones (donde la de la derecha es de d.g. operads).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{SymCacti} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{Cacti} \end{array}$$

Como  $\mathcal{SymCacti}$  está generado por  $\mathfrak{V}_1^1$  y  $\mathfrak{V}_1^1$ , la acción de éstos determina completamente un álgebra de cactus simétrica. Más precisamente, tenemos las siguientes observaciones.

**Observación 2.28.** Sea  $A$  un espacio d.g. con una estructura de álgebra de cactus simétrica, llamamos

$$x \cdot y := \mathfrak{V}_1^1(x, y) \quad x * y := (-1)^{|x|} \mathfrak{V}_1^1(x, y)$$

entonces se cumplen

- (i)  $(A, \cdot)$  es un álgebra d.g. con  $\cdot$  de grado 0.
- (ii)  $(A, *)$  Es un álgebra preLie, con  $*$  de grado 1.

(iii) El borde del producto  $*$  es el conmutador de  $\cdot$ , es decir:

$$d(x * y) - dx * y + (-1)^{|x|} x * dy = (-1)^{|x||y|} y.x - x.y$$

(iv) Una regla de Leibniz a izquierda de  $*$  respecto a  $\cdot$ , es decir:

$$(xy) * z = x(y * z) + (-1)^{|y|(|z|+1)}(x * z)y$$

*Demostración.* Se sigue de traducir cada punto en una ecuación en  $\mathcal{Cacti}$ :

(i)  da lugar a un producto asociativo y vale  $\delta \text{cactus} = 0$ .

(ii)  da lugar a un producto preLie y es de grado 1.

(iii) Se corresponde con la identidad  $\delta \text{cactus} = \text{cactus} - \text{cactus}$  en  $\mathcal{Cacti}$ .

(iv) Esto se desprende de que en  $\mathcal{Cacti}$  vale  $\text{cactus} \circ_1 \text{cactus} = \text{cactus} + \text{cactus}$

□

**Observación 2.29.** Si se tiene un álgebra d.g.  $A$  y un producto preLie en  $A$  de grado 1 que cumplen (iii) y (iv) de la observación anterior, se puede definir en  $A$  una única estructura de álgebra de cactus simétrica.

*Demostración.* Definimos la acción de  y  a partir del producto asociativo y el preLie respectivamente. Como (i)-(iv) son las relaciones que éstos satisfacen en  $\mathcal{Cacti}$ , queda bien definida su extensión al suboperad que ellos generan,  $\mathcal{SymCacti}$ . □

Por lo visto anteriormente, toda estructura de  $\mathcal{SymCacti}$  álgebra es en particular una estructura de álgebra de brace simétricas determinadas su producto preLie. Las mismas están dadas por la traducción de la identidad del teorema a  $\mathcal{Cacti}$ , esto es, se tienen operaciones  $\bar{B}_m$  definidas recursivamente por

$$\bar{B}_{n+1} = \text{cactus} \circ_1 \bar{B}_n - \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i \left( \bar{B}_n \circ_i \text{cactus} \right)^{\tau_i}$$

done  $\tau_i$  es la transposición  $(i + 1 \longleftrightarrow n + 1)$ .

Dado que  $\text{SymCacti} \subset \text{Cacti}$ , se tiene, en particular, que toda álgebra de cactus posee operaciones de brace simétricas. Esto es análogo al hecho de que toda álgebra de braces da lugar a un álgebra de brace simétrica vía la simetrización [DL06]. Más precisamente, se tiene el siguiente lema que es un complemento a la definición recursiva de los  $\overline{B}_m$ .

**Lema 2.30.** *Se tiene  $\overline{B}_n = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} (-1)^\sigma (B_n)^\sigma$ .*

O sea,  $\overline{B}_n$  es la suma (con signo) de los cactus que se obtienen de  al permutar los lóbulos salvo el primero.

*Demostración.* Veamos, de manera inductiva, que los  $\overline{B}_m$  así definidos cumplen la recursión. Primero, recordando 2.2, se tiene

$$\begin{aligned} B_2 \circ_1 B_n &= (121) \circ_1 (121 \dots 1k1 \dots 1n1) \\ &= \sum_{i=2}^n (-1)^{n-i-1} (\dots, 1, i, n+1, i, 1, \dots) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i-1} (\dots, i, 1, n+1, 1, i+1 \dots) \\ &= \sum_{i=2}^n (-1)^{n-1} (B_n \circ_i B_2)^{\tau_i} + \sum_{i=1}^n (-1)^\omega B_n^\omega \end{aligned}$$

donde  $\omega = (i+1, i+2, \dots, n+1)$ . Ahora, utilizando esto, calculamos

$$\begin{aligned} \overline{B}_{n+1} &= B_2 \circ_1 \overline{B}_n - \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^n (\overline{B}_n \circ_i B_2)^{\tau_i} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} (-1)^\sigma B_2 \circ_1 (B_n)^\sigma - \left( \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} (-1)^\sigma (B_n)^\sigma \circ_i B_2 \right)^{\tau_i} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_{n+1} \\ \sigma(1)=1, \sigma(n+1)=n+1}} (-1)^\sigma (B_2 \circ_1 B_n)^\sigma - (-1)^\sigma (B_n \circ_i B_2)^{\sigma \tau_i} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_{n+1} \\ \sigma(1)=1, \sigma(n+1)=n+1}} \sum_{i=2}^n (-1)^\sigma (-1)^{n-1} (B_{n+1})^{\tau_i \sigma} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_{n+1} \\ \sigma(1)=1}} (-1)^\sigma (B_{n+1})^\sigma \end{aligned}$$

□

A partir de  $\overline{B}_2 = B_2 = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}$  se definen, gracias a la ecuación anterior, de manera recursiva los  $\overline{B}_m \in \mathcal{SymCacti}$ . Determinar las relaciones entre los  $\overline{B}_m$  nos permite dar una descripción adicional de esta estructura. Es decir, se puede dar el operad  $\mathcal{SymCacti}$  como el generado por éstos y  $\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}$ . Esto da una definición alternativa del concepto de álgebra de cactus simétrica a partir de operaciones brace simétricas y un producto asociativo:

**Proposición 2.31.** *Un álgebra de cactus simétrica en un d.g. espacio  $(A, d)$  está determinada por:*

- La acción de  $\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}$ , determinando un producto de grado 0.
- La acción de los  $\overline{B}_n$ , operaciones  $n$ -arias de grado  $n - 1$ .

tal que se verifican (las relaciones que valen dentro de  $\mathcal{Cacti}$ ):

- (a) El producto definido por  $\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}$  hace de  $A$  un álgebra asociativa d.g.
- (b) Las operaciones dadas por  $\overline{B}_m$  hacen de  $A$  un álgebra de brace simétrica.
- (c)  $\overline{B}_m \circ_1 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} = \sum_{\substack{p+q=n+1 \\ \omega \in \text{Sh}(p,q)}} (\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \circ_1 \overline{B}_p \circ_{p+2} \overline{B}_q)^\omega$  (ver definición de shuffle 2.18).

$$(d) \delta \overline{B}_m = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} (-1)^\sigma \left( \delta \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right)^\sigma$$

*Demostración.* Las condiciones (a)-(c) para el caso particular de  $\overline{B}_2 = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}$  son exactamente (i)-(iv) de la observación 2.28. Recíprocamente, si se tiene una estructura de  $\mathcal{SymCacti}$ -álgebra, (a) y (b) son inmediatas y (c) y (d) se deducen del hecho  $\overline{B}_m = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} (-1)^\sigma (B_n)^\sigma$  (visto en el lema anterior). □



# Capítulo 3

## Una estructura $\mathcal{A}_\infty$ en $\mathcal{Cacti}$

Toda  $\mathcal{Cacti}$ -álgebra tiene un producto asociativo (no necesariamente conmutativo) proveniente de la inclusión (ver el apartado 3.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\hookrightarrow \mathcal{Cacti} \\ m_2 &\mapsto \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} \end{aligned}$$

Al simetrizar este producto asociativo (lo que equivale a considerar el producto dado por el elemento  $\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{2} \end{array}$ ) se gana la conmutatividad pero se pierde la asociatividad. Observemos que (un múltiplo de) este producto es equivalente (si se trabaja en característica distinta de 2) al original cuando se pasa a la homología, ya que:

$$2 \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} = \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{2} \end{array} + \underbrace{\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{2} \end{array}}_{-\delta \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array}}$$

El resultado principal de esta tesis (teorema 3.8) muestra que este producto es, sin embargo, asociativo a menos de homotopía, en el sentido operádico. Es decir, se prueba que existe un morfismo (dado explícitamente) de  $dg$ -operads:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\infty &\xrightarrow{\eta} \mathcal{Cacti} \\ m_2 &\mapsto \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{2} \end{array} \end{aligned}$$

Dicho morfismo se construye con la ayuda del operad  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$ . Se considera el morfismo  $\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_\infty^{(2)}$  de la observación 1.35 y, de esta forma, el problema se resuelve encontrando un morfismo  $\mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$  y considerando  $\eta = \mu\phi$ .

Notemos que  $\mathcal{Cacti}$  se puede considerar también como operad simétrico (estructura dada por la permutación de las etiquetas de los lóbulos).

En vistas de la sección 1.3, el morfismo  $\eta$  se corresponde con un morfismo de operads simétricos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Ass}_\infty & \xrightarrow{\bar{\eta}} & \mathcal{Cacti} \\ m_2 & \mapsto & \begin{array}{c} \text{②} \text{①} \\ \text{①} \text{②} \end{array} + \begin{array}{c} \text{①} \text{②} \\ \text{②} \text{①} \end{array} \end{array}$$

donde, recordemos,  $\mathcal{Ass}_\infty$  es el operad simétrico que codifica álgebras asociativas a menos de homotopía.

Vale mencionar en este contexto la relación entre el morfismo  $\eta$  y la llamada *conjetura de Deligne*. Sea  $\mathcal{G}$  el operad (simétrico) que codifica las álgebras de Gerstenhaber. El resultado clásico [Ger63], que la cohomología de Hochschild de  $A$  es un álgebra de Gerstenhaber, en lenguaje operádico se traduce en que  $H^*(A)$  es una  $\mathcal{G}$ -álgebra. Si  $\mathcal{G}_\infty$  es el operad [GCTV12] que codifica las álgebras de Gerstenhaber a menos de homotopía<sup>1</sup>, se puede formular la conjetura de Deligne como la siguiente pregunta: ¿Es  $\mathcal{C}^*(A)$  una  $\mathcal{G}_\infty$  álgebra? Dado que  $\mathcal{C}^*(A)$  es una  $\mathcal{Cacti}$ -álgebra y  $\mathcal{Cacti}$  es homotópicamente equivalente a  $\mathcal{G}_\infty$  esto es cierto [MS02, BF04, Kau07]. Sin embargo, aún está pendiente dar una respuesta más directa, esto es, una acción explícita de  $\mathcal{G}_\infty$  en  $\mathcal{C}^*(A)$ . Esto puede conseguirse explicitando un morfismo de operads (simétricos)

$$\mathcal{G}_\infty \rightarrow \mathcal{Cacti}$$

que sea la identidad (del operad simétrico  $\mathcal{G}$ ) en homología.

Debido a que en  $\mathcal{Cacti}$  la estructura de Lie es estricta (más aún, proviene de una estructura pre-Lie), es de esperar que la dificultad esté centrada en las homotopías correspondientes a la asociatividad del producto conmutativo y la distributividad con la estructura de Lie. En este sentido, concentrarse en el primer punto consiste en mirar el operad que codifica álgebras conmutativas a menos de homotopía,  $\mathcal{Com}_\infty$ , y construir un morfismo  $\mathcal{Com}_\infty \rightarrow \mathcal{Cacti}$  que sea la inclusión  $\mathcal{Com} \hookrightarrow \mathcal{G}$  en homología.

En esta situación, el morfismo  $\mathcal{Ass}_\infty \xrightarrow{\bar{\eta}} \mathcal{Cacti}$  es un paso en esta dirección, ya que se corresponde con el morfismo canónico  $\mathcal{Ass} \rightarrow \mathcal{Com} \hookrightarrow \mathcal{G}$  en homología. Pero, lamentablemente, dicho morfismo no se factoriza a través del operad  $\mathcal{Com}_\infty$ .

---

<sup>1</sup>En [GV95] esta terminología designa las álgebras que en esta tesis llamamos álgebras de Gerstenhaber y Voronov (o sea,  $\mathcal{Cacti}$ -álgebras)

El capítulo se organiza de la siguiente manera.

Se comienza presentando las construcciones  $\square$  y  $\blacksquare$  junto con el par de proposiciones 3.3 y 3.5, fundamentales en la demostración del teorema 3.8 más adelante. Se presentan estas construcciones no sólo en la notación de suryecciones sino también en la geométrica. De esta manera, consideramos se pueden entender y recordar de manera más sencilla las mencionadas proposiciones.

En la sección 3.2, se presenta el resultado más importante de este trabajo, el teorema 3.8. Allí, se construye un morfismo de operads  $\eta : \mathcal{A}_\infty \rightarrow \mathcal{Cacti}$ , factorizándolo a través de  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  con la ayuda del morfismo  $\phi$  de la observación 1.35. Se define entonces un morfismo  $\mu : \mathcal{A}_\infty^{(2)} \rightarrow \mathcal{Cacti}$  que cumple:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A}_\infty & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{A}_\infty^{(2)} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{Cacti} \\
 & & m_\blacksquare & \mapsto & \begin{array}{c} \text{2} \swarrow \searrow \text{1} \\ \text{1} \end{array} \\
 & & m_\square & \mapsto & \begin{array}{c} \text{1} \swarrow \searrow \text{2} \\ \text{2} \end{array} \\
 m_2 & \mapsto & m_\blacksquare + m_\square & \mapsto & \begin{array}{c} \text{2} \swarrow \searrow \text{1} \\ \text{1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{1} \swarrow \searrow \text{2} \\ \text{2} \end{array}
 \end{array}$$

Cabe destacar que no se tiene una razón *a priori* por la cual el morfismo que se desea encontrar,  $\eta : \mathcal{A}_\infty \rightarrow \mathcal{Cacti}$  deba factorizarse a través de  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$ . A la postre de la sección se describe además el morfismo  $\eta$  independientemente de su factorización por  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$ . Más precisamente, se explicita qué cactus aparecen como términos de  $\eta(m_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

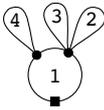
### 3.1. Las construcciones $\blacksquare$ y $\square$

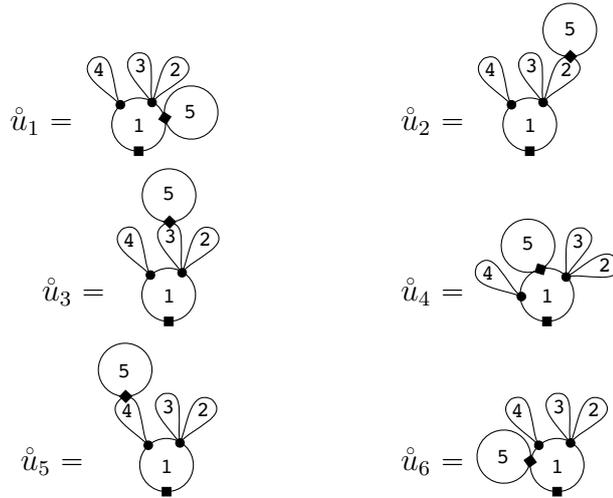
Describimos a continuación una construcción clave para el teorema 3.8 (de la siguiente sección). La misma permite organizar el morfismo  $\mathcal{A}_\infty \rightarrow \mathcal{Cacti}$  factorizándolo a través de  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$ . Para determinar que efectivamente se define un morfismo de *dg*-operads, se utilizan los resultados que se presentan en esta sección en las proposiciones 3.3 y 3.5.

**Definición 3.1.** Sea  $u$  un cactus con  $n$  lóbulos y  $n + k$  arcos tal que  $n$  aparece una sola vez en  $u$ , digamos en el lugar  $i$ . Es decir,  $u^{-1}(\{n\}) = \{i\}$ . Recordando la notación del ejemplo 2.2, se define

$$u^\square = \sum_{j < i} (-1)^{k+|u|_j} \hat{u}_j, \quad u^\blacksquare = - \sum_{j > i} (-1)^{k+|u|_j} \hat{u}_j,$$

O sea,  $\hat{u}_j \in \mathcal{Cacti}(n+1)_{k+1}$  es la sucesión obtenida a partir de  $u$  al reemplazar  $u(j)$  por  $(u(j), n+1, u(j))$  y  $|u|_j$  es el grado relativo de  $(u(1), \dots, u(j))$  respecto a  $u$ .

Por ejemplo, si  $u =$  , dado que  $k = 2$  e  $i = 5$ , los  $\hat{u}_j$  son:



Entonces, en este caso  $u^\square = \hat{u}_1 - \hat{u}_2 - \hat{u}_3 - \hat{u}_4$  y  $u^\blacksquare = -\hat{u}_6$ .

Gráficamente, si  $u$  es un cactus con  $n$  lóbulos y  $n+k$  arcos tal que  $n$  aparece una sola vez, podemos pensar que  $u^\square$  tiene como términos los que se obtienen de  $u$  agregando el lóbulo  $n+1$  sobre cada arco anterior al único arco del lóbulo  $n$ . Análogamente,  $u^\blacksquare$  tiene como términos aquellos que se tienen al plantar el lóbulo  $n+1$  sobre cada uno de los arcos que vienen después del arco del lóbulo  $n$ .

En otras palabras, se puede pensar  $u^\square$  (resp.  $u^\blacksquare$ ) como  $\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \circ_1 u$  calculado hasta el (resp. a partir del) lóbulo  $n$ . Esto puede verse al comparar el ejemplo de la observación anterior con el recién presentado. Esta idea es formalizada más adelante en la proposición 3.3.

Notemos que, por construcción, si  $u$  es un cactus con  $n$  lóbulos y  $n+k$  arcos tal que  $n$  aparece una sola vez, entonces tanto  $u^\square$  como  $u^\blacksquare$  son una suma de cactus de  $n+1$  lóbulos y  $n+k+1$  arcos tal que  $n+1$  aparece una sola vez. Para concluir la definición, extendemos linealmente las aplicaciones  $\blacksquare$  y  $\square$  al subespacio generado en cada aridad  $n$  por los cactus donde el lóbulo  $n$  tiene un sólo arco.

**Ejemplo 3.2.** Veamos algunos ejemplos más de  $\blacksquare$  y  $\square$ .

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \text{3} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right)^\square &= \begin{array}{c} \text{3} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \\ \left( \begin{array}{c} \text{2} \quad \text{1} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right)^\blacksquare &= 0 \\ \left( \begin{array}{c} \text{3} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right)^\square &= - \begin{array}{c} \text{3} \quad \text{4} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \\ \left( \begin{array}{c} \text{3} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right)^\blacksquare &= - \begin{array}{c} \text{4} \quad \text{3} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} - \begin{array}{c} \text{4} \quad \text{3} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \end{aligned}$$

La siguiente proposición permite relacionar las construcciones  $\blacksquare$  y  $\square$  con operaciones “internas” de cactus, será de utilidad más adelante.

**Proposición 3.3.** *Sea  $u$  un cactus en la condición de la definición anterior, es decir, de  $n$  lóbulos y  $n + k$  arcos tal que el lóbulo  $n$  tiene un sólo arco. Entonces*

$$u^\square - u^\blacksquare = (-1)^k \begin{array}{c} \text{2} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \circ_1 u - u \circ_n \begin{array}{c} \text{2} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array},$$

Más aún, se tiene

$$\begin{aligned} \delta(u^\square) - (\delta u)^\square &= (-1)^k \left( \begin{array}{c} \text{1} \quad \text{2} \\ \swarrow \searrow \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \right) \circ_1 u - u \circ_n \left( \begin{array}{c} \text{1} \quad \text{2} \\ \swarrow \searrow \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \right) \\ \delta(u^\blacksquare) - (\delta u)^\blacksquare &= (-1)^k \left( \begin{array}{c} \text{2} \quad \text{1} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right) \circ_1 u - u \circ_n \left( \begin{array}{c} \text{2} \quad \text{1} \\ \swarrow \searrow \\ \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.4.** Antes de la demostración, veamos para  $u = \begin{array}{c} \text{4} \quad \text{3} \quad \text{2} \\ \swarrow \searrow \\ \text{1} \end{array}$  la primera identidad, aprovechando que hemos realizado prácticamente todos los cálculos involucrados.

En la observación anterior calculamos  $\begin{array}{c} \text{2} \\ \swarrow \searrow \\ \text{1} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \text{4} \quad \text{3} \quad \text{2} \\ \swarrow \searrow \\ \text{1} \end{array}$ . Como  $\begin{array}{c} \text{4} \quad \text{3} \quad \text{2} \\ \swarrow \searrow \\ \text{1} \end{array} \circ_4 \begin{array}{c} \text{2} \\ \swarrow \searrow \\ \text{1} \end{array} = \begin{array}{c} \text{5} \\ \swarrow \searrow \\ \text{4} \quad \text{3} \quad \text{2} \\ \swarrow \searrow \\ \text{1} \end{array}$ , se tiene

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_4 \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} = \overbrace{\begin{array}{c} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{5} \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{5} \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{5} \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{5} \\ \textcircled{1} \end{array}} \\
+ \begin{array}{c} \textcircled{5} \\ \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} + \underbrace{\begin{array}{c} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{1} \end{array}}_{-\begin{array}{c} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array}}
\end{array}$$

*Demostración.* (de la proposición 3.3)

Sea  $i$  la posición de la única aparición del valor  $n$ , es decir,  $u^{-1}(\{n\}) = \{i\}$ .

A partir de la definición anterior y del ejemplo 2.2 se tiene:

$$\begin{aligned}
u^\square - u^\blacksquare &= \sum_{j < i} (-1)^{k+|u|_j} \hat{u}_j + \sum_{j > i} (-1)^{k+|u|_j} \hat{u}_j \\
(-1)^k \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 u - u \circ_n \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} &= (-1)^k \sum_j (-1)^{|u|_j} \hat{u}_j - (-1)^{k-|u|_i} \hat{u}_i.
\end{aligned}$$

Como ambos miembros de la derecha son iguales resulta:

$$u^\square - u^\blacksquare = (-1)^k \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 u - u \circ_n \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array},$$

Ahora bien, al aplicar el diferencial a esta ecuación, se tiene

$$\begin{aligned}
\delta(u^\square) - \delta(u^\blacksquare) &= (-1)^k (\begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \end{array}) \circ_1 u - (-1)^k u \circ_n (\begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \end{array}) \\
&+ (-1)^{k-1} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 \delta u - \delta u \circ_n \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array}.
\end{aligned}$$

Observemos que en cada término de  $\delta u$  el valor  $n$  también aparece sólo una vez. Luego, al aplicar la primera ecuación para cada término, obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta(u^\square) - \delta(u^\blacksquare) &= (-1)^k (\begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 u - \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 u - u \circ_n \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} + u \circ_n \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \end{array}) \\
&+ (\delta u)^\square - (\delta u)^\blacksquare.
\end{aligned}$$

En cada uno de los términos de esta ecuación los valores  $n$  y  $n + 1$  aparecen sólo una vez cada uno. Luego, la ecuación se separa en dos ecuaciones al considerar los términos en los cuales  $n$  aparece antes que  $n + 1$  o viceversa. En lado izquierdo, un término pertenece a la expresión  $\delta(u^\square)$  (resp.  $\delta(u^\blacksquare)$ ) si  $n + 1$  aparece antes (resp. después) de  $n$ . En el lado derecho, por otra parte,  $n + 1$  aparece antes (resp. después) del valor  $n$  en los términos de las expresiones  $(\delta u)^\square$ ,  $\mathcal{V}^{\square} \circ_1 u$  y  $u \circ_n \mathcal{V}^{\square}$  (resp.  $(\delta u)^\blacksquare$ ,  $\mathcal{V}^{\blacksquare} \circ_1 u$  y  $u \circ_n \mathcal{V}^{\blacksquare}$ ).  $\square$

La siguiente proposición será de utilidad más adelante.

**Proposición 3.5.** *Sean dos cactus  $u' \in \mathcal{Cacti}(p)_k$ ,  $u'' \in \mathcal{Cacti}(q)_\ell$ , tales que  $\sharp u'^{-1}(\{p\}) = \sharp u''^{-1}(\{q\}) = 1$ , es decir,  $p$  aparece sólo una vez en  $u'$  y  $q$  aparece sólo una vez en  $u''$ . Se tiene*

$$\begin{aligned} (u' \circ_i u'')^\square &= (-1)^\ell u'^\square \circ_i u'', & (u' \circ_p u'')^\square &= (-1)^\ell u'^\square \circ_p u'' + u' \circ_p u''^\square \\ (u' \circ_i u'')^\blacksquare &= (-1)^\ell u'^\blacksquare \circ_i u'', & (u' \circ_p u'')^\blacksquare &= (-1)^\ell u'^\blacksquare \circ_p u'' + u' \circ_p u''^\blacksquare \end{aligned}$$

para  $i \leq p - 1$ .

*Demostración.* Por la proposición 3.3, se tiene

$$(u' \circ_i u'')^\square - (u' \circ_i u'')^\blacksquare = (-1)^{k+\ell} \mathcal{V}^{\square} \circ_1 (u' \circ_i u'') - (u' \circ_i u'') \circ_{p+q-1} \mathcal{V}^{\blacksquare}$$

como  $\mathcal{Cacti}$  es un operad, el miembro derecho de la igualdad coincide con

$$\begin{aligned} (-1)^{k+\ell} (\mathcal{V}^{\square} \circ_1 u') \circ_i u'' - (-1)^\ell (u' \circ_p \mathcal{V}^{\blacksquare}) \circ_i u'' & \quad (i < p) \\ (-1)^{k+\ell} (\mathcal{V}^{\square} \circ_1 u') \circ_p u'' - u' \circ_p (u'' \circ_q \mathcal{V}^{\blacksquare}) & \quad (i = p) \end{aligned}$$

Ahora bien, la asociatividad (operádica)  $(u' \circ_p \mathcal{V}^{\blacksquare}) \circ_p u'' = u' \circ_p (\mathcal{V}^{\blacksquare} \circ_1 u'')$  implica

$$(u' \circ_i u'')^\square - (u' \circ_i u'')^\blacksquare = \begin{cases} (-1)^\ell (u'^\square - u'^\blacksquare) \circ_i u'' & (i < p) \\ (-1)^\ell (u'^\square - u'^\blacksquare) \circ_p u'' + u' \circ_p (u''^\square - u''^\blacksquare) & (i = p) \end{cases}$$

Nuevamente, esta ecuación se separa en dos, una para cada operación. En el lado izquierdo de la ecuación, los términos de  $(u' \circ_i u'')^\square$  son aquellos en los cuales  $p + q$  aparece antes que  $p + q - 1$ . En el lado derecho,  $p + q$  aparece antes que  $p + q - 1$  en los términos de  $u'^\square \circ_i u''$  (porque  $p + 1$  está antes que  $p$  en  $u'^\square$ ) y en los términos de  $u' \circ_p u''^\square$  ( $q + 1$  aparece antes que  $q$  en  $u''^\square$ ).  $\square$

### 3.2. Estructura $\mathcal{A}_\infty$ en $\mathcal{Cacti}$

#### Simetrización del producto y pérdida de la asociatividad

En esta sección estudiaremos la estructura asociativa dentro de  $\mathcal{Cacti}$ . Es decir, la estructura de  $\mathcal{A}$ -álgebra en toda  $\mathcal{Cacti}$ -álgebra dada por el morfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\hookrightarrow \mathcal{Cacti} \\ m_n &\mapsto (1, \dots, n) \end{aligned}$$

En otras palabras, en toda  $\mathcal{Cacti}$  álgebra se tiene un producto que es el dado por la acción del cactus

$$(1, 2) = \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array}$$

Debido a que esta operación proviene (por medio de la inclusión anterior) del generador  $m_2 \in \mathcal{A}$ , dicho producto es asociativo, o sea:

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} = \begin{array}{c} \textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} = \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_2 \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array}$$

Este producto no será conmutativo en general, ya que  $\begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} \neq \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array}$ . Sin embargo, dentro del operad  $\mathcal{Cacti}$  se tiene una homotopía para la conmutatividad:

$$(1, 2, 1) = \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array}$$

ya que

$$\delta \left( \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array}$$

Si se quiere obtener un producto conmutativo, uno puede considerar el definido por el elemento

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array}$$

Al hacer esto, la asociatividad se pierde. Calculemos de manera explícita la falla de la asociatividad.

$$\begin{aligned} (\begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array}) \circ_1 (\begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array}) &= \begin{array}{c} \textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{3} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{3} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} \\ (\begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array}) \circ_2 (\begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array}) &= \begin{array}{c} \textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} \end{aligned}$$

Ahora, al restar ambos miembros, se obtiene:

$$\begin{array}{c} \textcircled{3} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{3} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{1} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \searrow \swarrow \swarrow \\ \textcircled{1} \end{array} \neq 0$$

## Estructura $\mathcal{A}_\infty$ explícita

Notemos que la falla se puede *solucionar* con la homotopía  $m_3$ :

$$m_3 := \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \swarrow \searrow \\ \textcircled{2} \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \swarrow \searrow \\ \textcircled{1} \textcircled{2} \end{array}$$

Ya que

$$\delta \left( \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \swarrow \searrow \\ \textcircled{2} \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \swarrow \searrow \\ \textcircled{1} \textcircled{2} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{3} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{3} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \right)$$

Nuestro objetivo es mostrar que la secuencia  $m_2, m_3$  continúa dando lugar a una estructura de  $\mathcal{A}_\infty$ -álgebra. En otras palabras, definiremos un morfismo de  $dg$ -operads  $\eta : \mathcal{A}_\infty \rightarrow \mathcal{Cacti}$  tal que

$$\begin{aligned} m_2 &\mapsto \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \\ m_3 &\mapsto \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \swarrow \searrow \\ \textcircled{2} \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \swarrow \searrow \\ \textcircled{1} \textcircled{2} \end{array} \end{aligned}$$

Esto lo realizaremos con ayuda del  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  operad. Es decir, construiremos un morfismo  $\mu : \mathcal{A}_\infty^{(2)} \rightarrow \mathcal{Cacti}$  tal que al componer con  $\phi$  de la observación 1.35 obtendremos la estructura  $\mathcal{A}_\infty$  deseada:

$$\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$$

De esta manera, debe ser  $\eta(m_2) = \mu\phi(m_2) = \mu(m_\square + m_\bullet) = \mu(m_\square) + \mu(m_\bullet)$ . Por lo tanto consideraremos

$$\begin{aligned} \mu(m_\bullet) &= \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \\ \mu(m_\square) &= \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \end{aligned}$$

Observemos que las relaciones de asociatividad son:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \circ_2 \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} &= 0 \\ \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \circ_2 \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} &= 0 \\ \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \circ_2 \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} &= \begin{array}{c} \textcircled{3} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \\ \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \circ_2 \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} &= \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{3} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array} \end{aligned}$$

Luego, las operaciones son asociativas a la vez que  y  resuelven la falla de las asociatividades cruzadas ya que:

$$\delta \left( - \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \textcircled{3} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \textcircled{2} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \textcircled{2} \end{array}$$

$$\delta \left( \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{3} \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{1} \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \textcircled{1} \end{array}$$

Nuestro objetivo es, entonces, ver se puede extender a una estructura de  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$ . Esto es efectivamente así. Más aún, en la siguiente definición presentamos la construcción explícita del morfismo  $\mu : \mathcal{A}_\infty^{(2)} \rightarrow \mathcal{Cacti}$ .

En la búsqueda de este morfismo, nos hemos valido de la ayuda de un programa de computación que hemos desarrollado especialmente para realizar cálculos en el operad  $\mathcal{Cacti}$ . En el apéndice B además se incluyó, se explica tanto la implementación como la manera en que ha sido utilizado.

**Definición 3.6.** Definimos una aplicación  $\mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$  a partir de su valor en los generadores de cada aridad inductivamente de la siguiente manera:

- Para  $n = 1$ , se define  $\begin{cases} \mu(m_\blacksquare) = \begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{3} \\ \swarrow \downarrow \\ \textcircled{2} \end{array} \\ \mu(m_\square) = \begin{array}{c} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \swarrow \downarrow \\ \textcircled{1} \end{array} \end{cases}$
- Supongamos  $\mu(m_\xi)$  está definido y agregamos un ■ o un □ al final. En este caso, definimos:

$$\mu(m_{(\xi\blacksquare)}) := (\mu(m_\xi))^\blacksquare$$

$$\mu(m_{(\xi\square)}) := (\mu(m_\xi))^\square$$

Notar que, por construcción, se tiene:

$$\mu(m_\xi) = 0 \text{ si } \xi_1 = \xi_2 \text{ (en otras palabras, } \mu m_{(\blacksquare\blacksquare\dots)} = \mu m_{(\square\square\dots)} = 0).$$

Veamos ahora que  $\mu$  así definido es efectivamente un morfismo de  $dg$ -operads. Es decir, debemos verificar que  $\delta\mu = \mu\partial$  (donde recordemos que  $\delta$  es el diferencial de  $\mathcal{Cacti}$  y  $\partial$  el de  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$ ). Para eso, el siguiente lema busca describir la relación entre  $\delta\mu$  y  $\mu\partial$  de manera inductiva.

**Lema 3.7.** Sea  $\xi \in \{\blacksquare, \square\}^{n-1}$  entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \delta(\mu(m_{\xi\square})) - (\delta(\mu(m_\xi)))^\square &= (-1)^n \left( \mu(m_\square) \circ_1 \mu(m_\xi) - \mu(m_\xi) \circ_n \mu(m_\square) \right) \\ \delta(\mu(m_{\xi\blacksquare})) - (\delta(\mu(m_\xi)))^\blacksquare &= (-1)^n \left( \mu(m_\blacksquare) \circ_1 \mu(m_\xi) - \mu(m_\xi) \circ_n \mu(m_\blacksquare) \right) \\ \mu\partial(m_{\xi\square}) - (\mu\partial m_\xi)^\square &= (-1)^n \left( \mu(m_\square) \circ_1 \mu(m_\xi) - \mu(m_\xi) \circ_n \mu(m_\square) \right) \\ \mu\partial(m_{\xi\blacksquare}) - (\mu\partial m_\xi)^\blacksquare &= (-1)^n \left( \mu(m_\blacksquare) \circ_1 \mu(m_\xi) - \mu(m_\xi) \circ_n \mu(m_\blacksquare) \right) \end{aligned}$$

*Demostración.* Las primeras dos ecuaciones se siguen de la proposición 3.3. Veamos entonces las últimas dos.

Para  $\xi' \in \{\square, \blacksquare\}^{p-1}$ ,  $\xi'' \in \{\square, \blacksquare\}^{q-1}$ ,  $p, q \geq 2$ , se tiene

$$(\mu(m_{\xi' \circ_i m_{\xi''}}))^\square = \begin{cases} \mu((-1)^q m_{\xi'\square} \circ_i m_{\xi''}) & (i < p) \\ \mu((-1)^q m_{\xi'\square} \circ_p m_{\xi''} + m_{\xi' \circ_p} m_{\xi''\square}) & (i = p) \end{cases}$$

al aplicar la proposición 3.5 siendo  $u' \circ_i u''$  cada uno de los términos de  $\mu m_{\xi'} \circ_i \mu m_{\xi''}$ . Luego

$$(\mu\partial m_\xi)^\square = \mu \left( \sum (-1)^{q(p-i+1)+i-1} m_{\xi'\square} \circ_i m_{\xi''} + (-1)^{p-1} m_{\xi' \circ_p} m_{\xi''\square} \right)$$

Donde la suma es sobre todas las maneras de hacer  $\xi = \xi' \circ_i \xi''$ ,  $1 \leq i \leq p$  como al calcular el diferencial  $\partial_i$ . Por otra parte, todas las posibles descomposiciones de  $\xi\square$  son  $\square \circ_1 \xi$ ,  $\xi \circ_n \square$ ,  $\xi'\square \circ_i \xi''$  y  $\xi' \circ_p \xi''\square$  donde  $\xi', \xi''$  sea una descomposición de  $\xi$  como antes. Al calcular  $\partial(m_{\xi\square})$  estas cuatro tipos de descomposiciones aparecen de la siguiente manera

$$(-1)^n m_{\square \circ_1} m_\xi, (-1)^{n-1} m_\xi \circ_n m_\square, (-1)^{q(p-i+1)+i-1} m_{\xi'\square} \circ_i m_{\xi''}, (-1)^{p-1} m'_{\xi \circ_p} m_{\xi''\square}.$$

Y de esta manera se tiene la tercera ecuación

$$\mu\partial m_{\xi\square} - (\mu\partial m_\xi)^\square = (-1)^n (\mu m_\square \circ_1 \mu m_\xi - \mu m_\xi \circ_n \mu m_\square)$$

De manera análoga se obtiene la ecuación para  $\blacksquare$ . □

**Teorema 3.8.**  $\mu : \mathcal{A}_\infty^{(2)} \rightarrow \mathcal{Cacti}$  es un morfismo de dg-operads.

*Demostración.* El teorema se sigue del lema anterior por inducción en la longitud de las etiquetas. □

**Corolario 3.9.** Se tiene un morfismo de operads  $\eta : \mathcal{A}_\infty \rightarrow \mathcal{Cacti}$  definido como  $\eta = \mu\phi$  donde  $\mu$  es el del teorema anterior y  $\phi$  de la observación 1.35.

## Descripción alternativa del morfismo $\mathcal{A}_\infty \rightarrow \mathcal{Cacti}$

Recapitulando, tenemos

$$\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$$

donde  $\phi$  es el morfismo de la observación 1.35 y  $\mu$  el definido en 3.6. Así, se tiene  $\eta := \mu\phi$ . En este apartado se presenta una descripción de este morfismo de manera directa. Más precisamente, se describe el conjunto de términos de  $\eta(m_n)$  para cada  $n \geq 2$ .

**Definición 3.10.** Llamaremos  $\mathcal{C}_n$  al conjunto de los cactus  $u$  de  $n$  lóbulos con la propiedad:

“Si  $(i, j, i)$  es una subsecuencia de  $u$  entonces  $j > i + 1$ .”

Gráficamente, los cactus en  $\mathcal{C}_n$  son aquellos donde si un lóbulo  $j$  está sobre otro  $i$  (de manera inmediata o no) entonces debe ser no sólo mayor a él sino mayor a  $i + 1$ . En particular, el lóbulo 1 y 2 deben intersectarse en la raíz. También se tiene que el valor  $n$  aparece sólo una vez en  $u$ . Esto, gráficamente, quiere decir que no puede haber otros lóbulos sobre él.

Consideremos ahora  $\mathcal{C}'_n$  el conjunto de cactus en  $\mathcal{C}_n$  de grado máximo. Dado que los lóbulos 1 y 2 se intersectan en la raíz, la misma no puede ser  $n - 1$  (la dimensión máxima de cualquier cactus de  $n$  lóbulos). Es fácil ver que siempre existe un cactus en  $\mathcal{C}_n$  de dimensión  $n - 2$ , por lo tanto ésta es la dimensión máxima.

**Ejemplos 3.11.** Para  $n = 2, 3$ :

- $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}'_2 = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \end{array} \right\}$ .

- $\mathcal{C}_3 = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \end{array} \right\}, \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right\}, \mathcal{C}'_3 = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \end{array} \right\}, \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \end{array} \right\}$ .

Veremos que  $\eta(m_n)$  consiste exactamente de la suma (con signo) de los elementos de  $\mathcal{C}'_n$ . Esto se deduce de las siguientes propiedades y el hecho de que por definición (3.1) los términos de  $u^\square$  y  $u^\blacksquare$  son los cactus  $\hat{u}_j$  para  $j \neq i$  (donde  $i$  es el único arco del lóbulo  $n$ ).

**Observación 3.12.** Volviendo a la notación de la definición 3.1, para  $u$  un cactus de  $n$  lóbulos donde éste aparece sólo en la posición  $i$ ,  $\hat{u}_j$  (para  $j \neq i$ ) será el cactus que se obtiene de  $u$  reemplazando  $u(j)$  por  $(u(j), n + 1, u(j))$ . Se deducen inmediatamente de la definición las siguientes propiedades.

- Si  $u \in \mathcal{C}_n$  entonces  $\hat{u}_j \in \mathcal{C}_{n+1}$ .
- Todo cactus en  $\mathcal{C}_{n+1}$  se obtiene de esta manera.
- Si  $u \in \mathcal{C}'_n$  entonces  $\hat{u}_j \in \mathcal{C}'_{n+1}$  (cualquiera sea el arco  $j \neq i$ ).
- Si  $j \neq j'$  entonces  $\hat{u}_j \neq \hat{u}_{j'}$ .
- Si  $u \in \mathcal{C}'_n$  entonces  $\#\{\hat{u}_j\}_j = 2n - 3$ .
- Si  $u \neq u'$  entonces  $\{\hat{u}_j\}_j \cap \{\hat{u}_{j'}\}_{j'} = \emptyset$ .
- $\#\mathcal{C}'_{n+1} = (2n - 3) \cdot \#\mathcal{C}'_n$
- Para  $n \geq 3$ , se tiene  $\#\mathcal{C}'_n = 2(2n - 5)!! = 2 \cdot (2n - 5) \cdot (2n - 7) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1$ .

**Observación 3.13.** El morfismo  $\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$  está dado por:

$$m_n \mapsto \sum_{u \in \mathcal{C}'_n} \pm u$$

Como mencionamos en el capítulo 1, desde el punto de vista geométrico el morfismo  $\phi$  asigna a cada polígono dado por  $m_n$  la suma de los polígonos  $m_\xi$  con  $|\xi| = n$ . Ahora bien, en el caso de la estructura  $\mathcal{A}_\infty$  en el operad  $\mathcal{Cacti}$  encontrada cada  $\mu(m_\xi)$  corresponde precisamente a una componente conexa de  $\eta(m_n)$ . A continuación expondremos la estructura geométrica de estas componentes en aridad  $n = 3, 4, 5$ . Estos términos están resumidos en la siguiente tabla

$m_{\blacksquare\blacksquare}$	$\mapsto$	(1312)
$m_{\square\blacksquare}$	$\mapsto$	$-(2131)$
$m_{\blacksquare\blacksquare\blacksquare}$	$\mapsto$	$-(131412) - (131242)$
$m_{\blacksquare\blacksquare\square}$	$\mapsto$	$-(141312)$
$m_{\square\blacksquare\blacksquare}$	$\mapsto$	$+(213141)$
$m_{\square\blacksquare\square}$	$\mapsto$	$+(242131) + (214131)$
$m_{\blacksquare\square\blacksquare\blacksquare}$	$\mapsto$	$+(13141512) + (13141252) + (13124252)$
$m_{\blacksquare\square\blacksquare\square}$	$\mapsto$	$-(15131412) + (13531412) + (13151412) - (15131242)$ $+ (13531242) + (13151242) + (13125242)$
$m_{\blacksquare\square\square\blacksquare}$	$\mapsto$	$+(14131252) + (14131512) + (14135312) - (14151312)$
$m_{\blacksquare\square\square\square}$	$\mapsto$	$-(15141312)$
$m_{\square\square\blacksquare\blacksquare}$	$\mapsto$	$-(21314151)$
$m_{\square\square\blacksquare\square}$	$\mapsto$	$+(25213141) + (21513141) - (21353141) - (21315141)$
$m_{\square\square\square\blacksquare}$	$\mapsto$	$+(24252131) + (24215131) - (24213531) - (24213151)$ $+ (21415131) - (21413531) - (21413151)$
$m_{\square\square\square\square}$	$\mapsto$	$+(25242131) + (25214131) + (21514131)$

Debido a la simetría de las construcciones  $\square$  y  $\blacksquare$ , las componentes correspondientes una etiqueta y a la obtenida intercambiando la decoración lugar a lugar tienen la misma geometría.

Para el caso de  $\eta m_3$ , la misma consiste en dos componentes similares (dos segmentos):

$$\mu m_{\square\blacksquare} = \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \quad \mu m_{\blacksquare\square} = \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \end{array}.$$

Por otra parte,  $\eta m_4$  consta de cuatro componentes conexas, dos de ellas triángulos:

$$\mu m_{\square\blacksquare\blacksquare} = \begin{array}{c} \textcircled{4} \quad \textcircled{3} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \quad \mu m_{\blacksquare\square\square} = \begin{array}{c} \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \end{array}$$

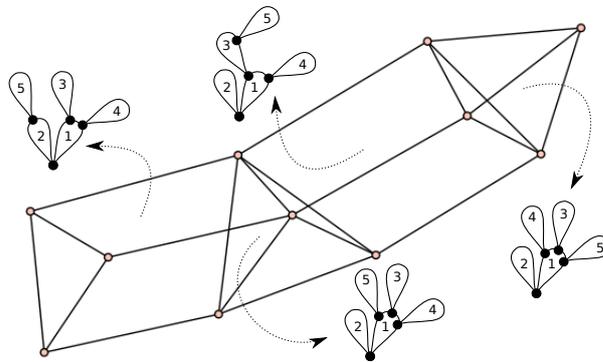
Las restantes consisten en dos pentágonos que se subdividen cada uno en un triángulo y un rectángulo (es decir, un producto de dos 1-símplices):

$$\mu m_{\square\square\blacksquare\blacksquare} = \begin{array}{c} \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \quad \mu m_{\blacksquare\blacksquare\square\square} = \begin{array}{c} \textcircled{4} \quad \textcircled{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \end{array}$$

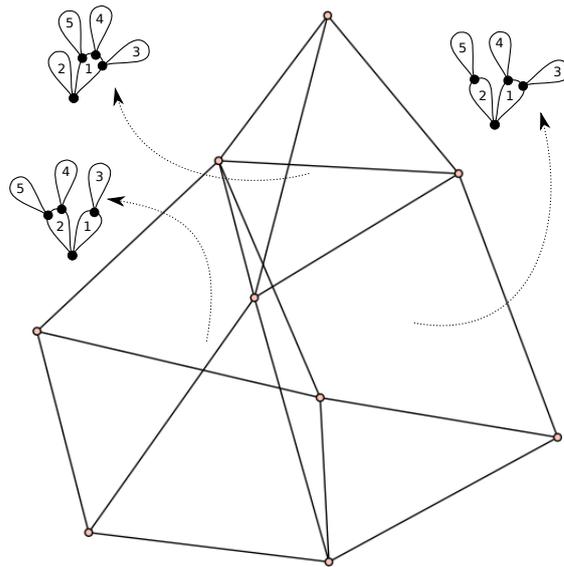
La operación  $\eta m_5$  por otra parte tiene ocho componentes, dos 3-símplices:

$$\mu m_{\square \blacksquare \blacksquare} = \begin{array}{c} \textcircled{4} \quad \textcircled{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{5} \quad \textcircled{2} \end{array} \quad \mu m_{\blacksquare \square \square} = \begin{array}{c} \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{5} \end{array} .$$

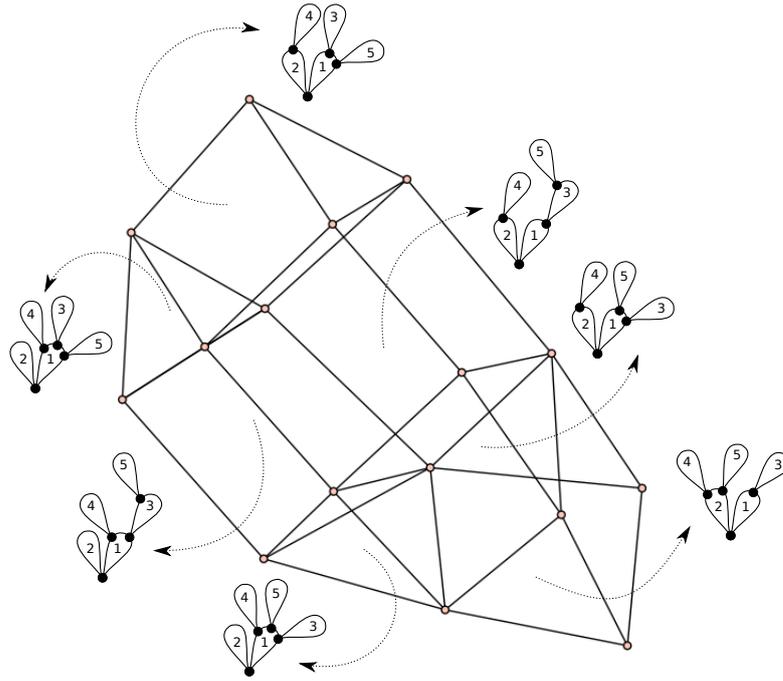
Las componentes correspondientes a  $\mu m_{\square \blacksquare \blacksquare}$  y  $\mu m_{\blacksquare \square \square}$  constan de dos 3-símplices y dos prismas de base triangular (producto de 1-símplice y un 2-símplice). Por ejemplo,  $\mu m_{\blacksquare \square \square}$  es:



En el caso de  $\mu m_{\square \blacksquare \blacksquare}$  y  $\mu m_{\blacksquare \square \square}$ , se tiene un 3-símplice y dos prismas de base triangular. El elemento  $\mu m_{\square \blacksquare \blacksquare}$  es:



Por último, las componentes  $\mu m_{\square\square\square}$  y  $\mu m_{\blacksquare\square\square}$  se componen, cada una de dos 3-simplices, cuatro prismas de base triangular y un prisma de base rectangular (es decir, un producto de tres 1-simplices). A continuación se presenta  $\mu m_{\blacksquare\square\square}$ :



# Capítulo 4

## Compatibilidad con el grado

En el presente capítulo se estudian un cierto tipo de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebras, es decir, consideraremos  $\mathcal{Cacti}$  como operad simétrico. Introducimos la noción de álgebra *compatible con el grado*. Éstas son álgebras (bigraduadas) en las cuales, entre otras propiedades (ver definición 4.4), los cactus

$$B_n = \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{n} \end{array}$$

actúan de manera trivial si se evalúan en la primera entrada en elementos de grado menor a  $n - 1$ . Es decir, se anulan cuando el grado del elemento en la primera entrada es menor a la cantidad de entradas sobre ésta en el dibujo. Esta propiedad está motivada en el ejemplo de  $C^\bullet(A)$ , el complejo de Hochschild de un álgebra asociativa (d.g.)  $A$ .

Por otra parte, toda  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra es, en particular, un álgebra asociativa d.g. En esta sección estudiaremos la estructura de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra en  $A$  cuando  $A$  es asociativa libre. Es decir,  $A = \overline{TV}$ .

De manera más específica, se estudian estructuras de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra en en el álgebra asociativa  $\overline{TV}$  (con  $V$  un espacio vectorial) que tengan dicha propiedad de compatibilidad con el grado (ver 4.4). El resultado principal del capítulo es el siguiente (el mismo se deduce inmediatamente del teorema 4.10 y el corolario 4.13).

**Teorema:** *La categoría de biálgebras asociativas unitarias y counitarias d.g. es equivalente a la categoría de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebras compatibles con el grado que son libres como álgebra asociativa y generadas en grado uno.*

Más precisamente, el teorema dice que si  $\overline{TV}$  tiene una estructura de  $s\mathcal{C}acti$ -álgebra que *extiende* (definición 4.3) la de álgebra asociativa y es *compatible con el grado* (definición 4.4), entonces el producto pre-Lie inducido en  $V$  y el coproducto inducido por (parte d) el diferencial dan lugar a una estructura de biálgebra asociativa unitaria y counitaria d.g. en  $H = V \oplus k1_H$ . Recíprocamente, si  $V$  es el ideal de aumentación de una biálgebra asociativa unitaria y counitaria  $(H, \Delta, *, \epsilon, 1_H)$  y  $V = \text{Ker}(\epsilon)$ , entonces  $\overline{TV}$  es de manera natural (*i.e.* functorial en  $H$ ) una  $s\mathcal{C}acti$ -álgebra, que extiende a la de álgebra asociativa libre y es compatible con el grado.

Este resultado puede pensarse de la siguiente manera, si  $H$  es una coálgebra, se tiene vía la construcción cobar una estructura de  $dg$ -álgebra asociativa en  $\Omega H = \overline{TV}$ . En el caso que  $H$  sea una biálgebra (d.g.), la estructura de álgebra diferencial graduada en  $\overline{TV}$  se puede enriquecer (ver [Men04, Kad05]) a una estructura de  $s\mathcal{C}acti$ -álgebra. En este sentido, el teorema 4.10 nos da una correspondencia uno a uno entre dichas estructuras y las estructuras de biálgebra asociativa y coasociativa d.g. en  $H = V \oplus 1_H$ . Esto generaliza, el hecho ya mencionado de que  $\Omega H = \overline{TV}$  es álgebra de cactus si  $H$  es una biálgebra d.g.

Luego, se pasa al estudio de los morfismos de  $\mathcal{C}acti$ -álgebras entre álgebras con esta propiedad. En particular, de qué manera un morfismo entre álgebras compatibles con el grado que parte de  $\overline{TV}$  queda determinado por su restricción en  $V$  (ver lema 4.12). Se deduce que la correspondencia antes mencionada entre biálgebras y álgebras de cactus compatibles con el grado (dada por la construcción cobar) es una equivalencia de categorías.

Otra motivación para estudiar este problema es la siguiente. Recordemos que el operad (simétrico)  $\mathcal{G}$  ([LV12, 13.3.10]) que codifica álgebras de Gerstenhaber puede describirse como generado por dos operaciones: el corchete, que es de Lie (de grado 1) y la multiplicación, conmutativa. Dada un álgebra de Gerstenhaber que es libre como álgebra (super) conmutativa con generadores en grado uno, es decir  $A = \Lambda V$ , es fácil ver que la estructura del corchete de Gerstenhaber en  $A$  está determinada unívocamente por una estructura de álgebra de Lie en  $V$ , y recíprocamente, una estructura de álgebra de Lie en  $V$  determina de manera única una estructura de Gerstenhaber en  $A = \Lambda V$ . La homología de una  $s\mathcal{C}acti$ -álgebra es un álgebra de Gerstenhaber. En este sentido la primera es una versión relajada de la segunda. Nos resulta natural entonces estudiar qué estructura adicional en un espacio vectorial  $V$  determina la estructura de  $s\mathcal{C}acti$ -Álgebra en el álgebra asociativa libre  $\overline{TV}$ . Volveremos sobre este punto en el ejemplo 4.11.

Por último, como aplicación de la caracterización de morfismos entre álgebras de cactus compatibles con el grado, se presenta el teorema 4.16. En el mismo, se obtiene para  $A$  un álgebra asociativa (d.g.) y  $H$  una biálgebra (unitaria y counitaria d.g.) una correspondencia uno a uno entre las estructuras de  $H$ -módulo álgebra en  $A$  y los morfismos (de álgebras de cactus)  $\Omega H \rightarrow C^\bullet(A)$ .

El capítulo se organiza en tres secciones.

En la primera se presenta la propiedad de compatibilidad con el grado y se estudia el caso de un álgebra de cactus de la forma  $A = \overline{TV} = \bigoplus_{n>0} V^{\otimes n}$ , con estructura de álgebra asociativa dada por el producto tensorial y con bigraduación dada por el grado interno de  $V$  y el tensorial. Se prueba en el teorema 4.10 que una estructura de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra en  $A$  compatible con esa graduación es equivalente a una estructura de biálgebra (asociativa, unitaria y counitaria d.g.) en  $H = V \oplus k1_H$ .

En la segunda sección, se estudian los morfismos entre ciertas álgebras compatibles con el grado. Mas precisamente, se obtiene el lema 4.12 que caracteriza los morfismos  $f : T \rightarrow C$  entre dos álgebras con esta propiedad más una condición sobre  $T$  (estar generada como álgebra asociativa por los elementos de grado uno). De esto se desprende, de manera inmediata, que lo obtenido en la sección anterior es una equivalencia de categorías. Como otra aplicación de este lema, se presenta el teorema 4.16. Allí vemos que si  $A$  es un álgebra (d.g.) y  $H$  una biálgebra (d.g.), se tiene una correspondencia biyectiva entre las estructuras de  $H$ -álgebra módulo en  $A$  y los morfismos de álgebras de cactus  $\Omega H \rightarrow C^\bullet(A)$ .

En la última sección se expone de manera breve de qué manera puede verse una estructura de álgebra de cactus como caso particular de álgebra de Baues y cómo se posicionan los resultados obtenidos entre otros existentes. En cuanto a ésto, en el último apartado se comenta de qué manera se relaciona lo obtenido en el presente trabajo con lo ya conocido acerca de la estructura de álgebra de cactus en  $\Omega H$  para  $H$  una biálgebra. Esto se realiza de manera separada y compacta al final del capítulo con el objetivo de exponer de forma clara cuál es el aporte original del mismo.

## 4.1. Estructura de $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra en $TV$

La presente sección se desarrolla alrededor del teorema 4.10 donde se muestra que es equivalente dar una estructura de biálgebra d.g. en  $H$  que una estructura de álgebra de cactus compatible con el grado (ver 4.4). La parte original de esta sección es, además de poner los signos adecuados para cualquier característica (en [Kad05] el autor trabaja en característica 2) y proveer de una demostración explícita de dicho resultado, dar las condiciones exactas en las cuales vale la vuelta. Es decir, que si  $A$  es una  $s\mathcal{Cacti}$  álgebra que como álgebra asociativa es isomorfa a  $\overline{TV}$  y, además, es compatible con el grado (propiedad esencial para la equivalencia) entonces la estructura  $s\mathcal{Cacti}$  determina de manera unívoca una estructura de biálgebra d.g. en  $H = V \oplus k1_H$ , que, al aplicarle la construcción cobar, queda (naturalmente) isomorfa a  $A$ . En otras palabras, mostramos que el funtor dado por la construcción de Kadeishvili es esencialmente suryectivo, si ponemos como categoría de llegada a las  $s\mathcal{Cacti}$  álgebras compatibles con el grado, generadas libremente (como álgebras asociativas) en grado (externo) uno.

Al mostrar que si  $H$  es una biálgebra d.g.,  $\Omega H$  resulta una  $s\mathcal{Cacti}$  álgebra, la idea central es que el producto asociativo en  $V$  determina la estructura pre-Lie (no asociativa) en  $\Omega H$  y ésta, a su vez, determina la estructura de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra en  $\overline{TV}$ . En relación al segundo paso, lo que aquí se hace puede traer reminiscencias de lo comentado en la sección 2.6 acerca de los trabajos [OG05, LM05]. Allí, Los autores muestran que, dada un álgebra pre-Lie, queda determinada de manera unívoca una estructura de álgebra de brace *simétrica*. Nuestro enfoque es distinto: en primer lugar, es evidente de la construcción que la estructura de brace no es simétrica. Por otro lado, el método nuestro no se aplica en el contexto anterior pues nos valemos fuertemente de la existencia del producto asociativo en  $\mathcal{Cacti}$ , su propiedad de distributividad con las braces, además del hecho de que en  $\overline{TV}$  cualquier elemento es (combinación lineal de elementos) de la forma  $\mathbf{x} = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ .

Comencemos con unas observaciones preliminares (4.1 y 4.2) acerca de estructuras de coálgebra y diferenciales. Si bien ambas observaciones son resultados bien conocidos, incluimos aquí sus demostraciones pues forman parte de la reconstrucción de la estructura de biálgebra en  $V$  a partir de la de  $s\mathcal{Cacti}$  en  $TV$ . Más precisamente, para definir una biálgebra se necesita un producto y un coproducto: el producto en  $V$  provendrá de la composición preLie de  $TV$  restringida a  $V$ , y el coproducto en  $V$  provendrá del diferencial de  $TV$ . Luego de estas observaciones pasaremos a las definiciones necesarias (4.3 y 4.4) para la formulación precisa del teorema 4.10.

Sea  $V$  un espacio vectorial *graduado*. Recordamos que  $TV = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$  es el álgebra asociativa unitaria libre en  $V$ , y  $\overline{TV} = \bigoplus_{n > 0} V^{\otimes n}$  es el álgebra asociativa libre no-unitaria en  $V$ . A su vez, tanto  $TV$  como  $\overline{TV}$  resultan álgebras bigraduadas con el grado inducido por el de  $V$  como interno y la graduación tensorial como externa, es decir, se decreta  $|v|_e = 1 \ \forall v \in V$ .

**Observación 4.1.** Si  $V$  es un espacio no graduado (es decir, con graduación concentrada en grado cero), entonces dar una estructura diferencial en  $A = TV$  (o  $A = \overline{TV}$ ) es equivalente a dar estructura de cóalgebra coasociativa (no necesariamente counitarias) en  $V$ .

Si  $V$  es un espacio graduado, una estructura diferencial en  $TV$  compatible con la bigraduación, esto es un diferencial  $D = d_i + d_e$  donde  $d_i$  sube grado interno en uno (y no altera el grado externo) y  $d_e$  sube en uno el grado externo (y no altera el interno) está en correspondencia con las estructuras de cóalgebra coasociativa diferencial graduada (no necesariamente counitarias) en  $V$ .

*Demostración.* Sea  $d : A \rightarrow A$  una estructura diferencial en  $A$ , es decir,  $d$  tal que  $d^2 = 0$  y  $d(ab) = d(a)b + (-1)^{|a|}ad(b)$  para todo  $a, b \in A$  donde  $a$  es homogéneo de grado  $|a|$ , y  $|d(a)| = |a| + 1$ .

Consideremos primero el caso no graduado. Tomando  $a = v \in V$  tenemos que  $|dv| = 2$ , luego  $dv \in V^{\otimes 2}$  y por lo tanto la restricción a  $V$  produce una aplicación de deconcatenación:

$$\Delta' := d|_V : V \rightarrow V \otimes V$$

De aquí en adelante, proponemos la notación tipo *Sweedler* para la comultiplicación, es decir  $v_{(1)} \otimes v_{(2)}$  es en realidad una suma de términos de este tipo. Volviendo a  $\Delta'$ , esta aplicación es necesariamente coasociativa pues, escribiendo  $\Delta'v = v_{(1)} \otimes v_{(2)}$  y usando que  $d$  es un diferencial, se tiene

$$0 = d^2v = d(v_{(1)} \otimes v_{(2)}) = d(v_{(1)}) \otimes v_{(2)} - v_{(1)} \otimes d(v_{(2)})$$

es decir,  $(\Delta' \otimes \text{Id} - \text{Id} \otimes \Delta') \circ \Delta' = 0$ , o equivalentemente

$$(\Delta' \otimes \text{Id}) \circ \Delta' = (\text{Id} \otimes \Delta') \circ \Delta',$$

que es el axioma de coasociatividad para  $\Delta'$ .

Recíprocamente, si  $\Delta'$  es una estructura de coálgebra coasociativa en  $V$ , por ser  $A = TV$  (o  $\overline{TV}$ ) libre, toda aplicación lineal  $\Delta' : V \rightarrow V \otimes V$  se extiende de forma única a una (super)derivación  $d : A \rightarrow A$ , y una (super)derivación es de cuadrado cero si y solo lo es en los generadores. Por último, observemos que verificar  $d^2 = 0$  en los generadores equivale, por el cálculo anterior, al axioma de coasociatividad de  $\Delta'$  en  $V$ .

Para la segunda parte, la condición  $D^2 = 0$  se traduce, por la bigraduación, en  $d_i^2 = 0$ ,  $d_e^2 = 0$  y que ambos diferenciales conmutan. La primera condición es justamente que  $d_i|_V$  es un diferencial en  $V$ . La segunda, como antes, dice que  $\Delta'$  es coasociativa. La última que  $\Delta'$  es un morfismo de espacios d.g.  $\square$

**Observación 4.2.** Las estructuras de coálgebra coasociativa no necesariamente counitarias en  $V$  están en correspondencia con las estructuras coasociativas counitarias en  $H := V \oplus k1_H$  tales que  $1_H$  es de tipo grupo (esto es,  $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ , necesariamente de grado interno cero), con counidad dada por  $\epsilon(1_H) = 1$  y  $\epsilon|_V = 0$ .

*Demostración.* Dada  $\Delta' : V \rightarrow V \otimes V$ , se define

$$\Delta : H \rightarrow H \otimes H$$

a través de

$$\Delta(v) := \Delta'(v) + 1_H \otimes v + v \otimes 1_H = v_1 \otimes v_2 + 1_H \otimes v + v \otimes 1_H$$

y  $\Delta 1_H := 1_H \otimes 1_H$ . Veamos que  $\Delta'$  es coasociativa si y sólo si  $\Delta$  lo es. Calculamos primero

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{Id})(\Delta v) &= (\Delta \otimes \text{Id})(v_{(1)} \otimes v_{(2)} + 1_H \otimes v + v \otimes 1_H) \\ &= \Delta'(v_{(1)}) \otimes v_{(2)} + 1_H \otimes v_{(1)} \otimes v_{(2)} + v_{(1)} \otimes 1_H \otimes v_{(2)} \\ &\quad + 1_H \otimes 1_H \otimes v \\ &\quad + v_{(1)} \otimes v_{(2)} \otimes 1_H + 1_H \otimes v \otimes 1_H + v \otimes 1_H \otimes 1_H \end{aligned}$$

A su vez,

$$\begin{aligned} (\text{Id} \otimes \Delta)(\Delta v) &= (\text{Id} \otimes \Delta)(v_{(1)} \otimes v_{(2)} + 1_H \otimes v + v \otimes 1_H) \\ &= v_{(1)} \otimes \Delta'(v_{(2)}) + v_{(1)} \otimes 1_H \otimes v_{(2)} + v_{(1)} \otimes v_{(2)} \otimes 1_H \\ &\quad + 1_H \otimes v_{(1)} \otimes v_{(2)} + 1_H \otimes v \otimes 1_H + 1_H \otimes 1_H \otimes v \\ &\quad + v \otimes 1_H \otimes 1_H \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(\Delta \otimes \text{Id})(\Delta v) - (\text{Id} \otimes \Delta)(\Delta v) = \Delta'(v_{(1)}) \otimes v_{(2)} - v_{(1)} \otimes \Delta'(v_{(2)})$$

es decir,

$$(\Delta \otimes \text{Id} - \text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta' \otimes \text{Id} - \text{Id} \otimes \Delta') \circ \Delta'$$

por lo cual trivialmente una es coasociativa si y sólo si la otra lo es.

Claramente, definiendo  $\epsilon : H \rightarrow k$  a través de  $\epsilon(v) = 0 \forall v \in V$  y  $\epsilon(1_H) = 1$ , resulta una counidad para  $H$ , es decir, se tiene  $\forall h \in H$ :

$$(\epsilon \otimes \text{Id})\Delta(h) = h = (\text{Id} \otimes \epsilon)\Delta(h),$$

Recíprocamente, si  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$  verifica  $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$  y  $\epsilon : H \rightarrow k$  es una counidad, entonces necesariamente  $\epsilon(1_H) = 1$ . Si tenemos  $v \in V$ , sabemos que

$$\Delta(v) \in H \otimes H = (V \otimes V) \oplus (k1_H \otimes V) \oplus (V \otimes k1_H) \oplus (k1_H \otimes k1_H)$$

y por lo tanto se escribirá en la forma

$$\Delta v = \Delta'(v) + v_- \otimes 1_H + 1_H \otimes v_+ + \lambda 1_H \otimes 1_H$$

De las igualdades  $(\epsilon \otimes \text{Id})\Delta(v) = v = (\text{Id} \otimes \epsilon)(\Delta(v))$  y sabiendo que  $\epsilon(v) = 0$  para  $v \in V$ , se tiene

$$v_+ + \lambda 1_H = v = v_- + \lambda 1_H$$

de donde obtenemos, mirando las componentes en  $V$  y en  $k1_H$ ,

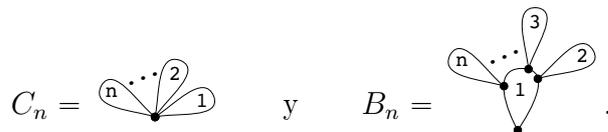
$$v = v_+ = v_-, \lambda = 0$$

por lo tanto  $\Delta$  es de la forma

$$\Delta v = \Delta'(v) + v \otimes 1_H + 1_H \otimes v$$

□

**Aclaración:** En lo que resta de este capítulo, consideraremos al operad  $\mathcal{Cacti}$  como simétrico (lo notaremos, en consecuencia,  $s\mathcal{Cacti}$ ). Recordemos que en la observación 2.9 vimos que el mismo está generado como operad simétrico por los cactus del tipo





- Las operaciones son homogéneas en el grado externo (o sea,  $C_2$  actúa con bigrado  $(0, 0)$ ,  $B_n$  con bigrado  $(n - 1, 0)$ )
- El diferencial es compatible con la bigraduación, esto es, está dado por un diferencial interno  $d_i$  y externo  $d_e$ :

$$\begin{aligned} d_i & : T^{n, \bullet} \rightarrow T^{n+1, \bullet} \\ d_e & : T^{\bullet, n} \rightarrow T^{\bullet, n+1} \end{aligned}$$

- Los  $B_n$  actúan se anulan cuando en su primer argumento es un elemento de grado externo menor a  $|B_n| = n - 1$ . Es decir, se tiene

$$a \in T^{\bullet, q}, q < n - 1 \implies \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \\ \textcircled{7} \\ \textcircled{8} \\ \textcircled{9} \\ \textcircled{10} \\ \textcircled{11} \\ \textcircled{12} \\ \textcircled{13} \\ \textcircled{14} \\ \textcircled{15} \\ \textcircled{16} \\ \textcircled{17} \\ \textcircled{18} \\ \textcircled{19} \\ \textcircled{20} \\ \textcircled{21} \\ \textcircled{22} \\ \textcircled{23} \\ \textcircled{24} \\ \textcircled{25} \\ \textcircled{26} \\ \textcircled{27} \\ \textcircled{28} \\ \textcircled{29} \\ \textcircled{30} \\ \textcircled{31} \\ \textcircled{32} \\ \textcircled{33} \\ \textcircled{34} \\ \textcircled{35} \\ \textcircled{36} \\ \textcircled{37} \\ \textcircled{38} \\ \textcircled{39} \\ \textcircled{40} \\ \textcircled{41} \\ \textcircled{42} \\ \textcircled{43} \\ \textcircled{44} \\ \textcircled{45} \\ \textcircled{46} \\ \textcircled{47} \\ \textcircled{48} \\ \textcircled{49} \\ \textcircled{50} \end{array} (a, \dots) = 0$$

**Ejemplo 4.5.** En el complejo de Hochschild, el grado externo de una  $f \in \text{Hom}(A^{\otimes n}, A)$  es  $n$  y el grado interno es el grado como morfismo. La estructura es compatible con el grado ya que si  $f : A^{\otimes n} \rightarrow A$ , se tiene  $f\{g_1, \dots, g_m\} = 0$  para  $m < n$ .

Para un espacio vectorial graduado  $V$ , consideramos  $\overline{TV}$  como álgebra bigraduada, con producto el producto tensorial, grado exterior el tensorial y grado interno dado por la graduación de  $V$ , es decir, si  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$  con  $v_i$  homogéneo para todo  $i$ , entonces su bigrado es  $(\sum_{i=1}^n |v_i|_V, n)$ .

**Ejemplo 4.6.** Si  $H$  es una biálgebra, veremos más adelante que su construcción cobar  $\Omega H$  es, además de álgebra asociativa (debido a la estructura de coálgebra de  $H$ ), una *sCacti* álgebra [Kad05] que resulta compatible con el grado.

**Notación.** Llamemos  $*$  al producto dado por la acción de  $B_2 = \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} = (121)$  en  $A$ . Más precisamente

$$a * b := (-1)^{|a|} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} (a, b) = (-1)^{|a|} B_2(a, b)$$

Este producto se puede definir en cualquier *sCacti*-álgebra y es pre-Lie por definición. Notar que en el caso que estamos estudiando, debido a los grados involucrados, al ser restringido a  $V$  toma valores en  $V$ . Tenemos entonces el siguiente lema.

**Lema 4.7.** Si  $A$  es una Cacti álgebra bigraduada con estructura compatible con el grado, entonces la operación  $B_2$  restringida a  $A_1 = \bigoplus_p A^{p,1}$  (con su signo adecuado) es un producto asociativo en  $A_1$ :

$$\begin{aligned} A_1 \otimes A_1 &\rightarrow A_1 \\ a \otimes b &\mapsto (-1)^{|a|_{tot}} B_2(a, b) = -(-1)^{|a|_{int}} B_2(a, b) =: a * b \end{aligned}$$

*Corolario:* Sea en  $\overline{TV}$  una estructura de  $sCacti$ -álgebra compatible con el grado. El producto  $*$  :  $V \times V \rightarrow V$ , en principio pre-Lie, resulta asociativo.

*Demostración.* (del lema)

Al calcular el asociador para  $x, y, z \in A_1$ , se tiene:

$$\begin{aligned} (x * y) * z - x * (y * z) &= (-1)^{|y|+1} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} \left( \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} (x, y), z \right) - (-1)^{|x|+|y|} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} (x, \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} (y, z)) \\ &= (-1)^{|y|+1} \left( \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} \left( \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} (, ), \right) + \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} (, \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} (, )) \right) (x, y, z) \\ &= (-1)^{|y|+1} \left( \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_2 \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} \right) (x, y, z) \\ &= (-1)^{|y|+1} \left( \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \diagdown \\ \textcircled{3} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} \right) (x, y, z) \\ &= (-1)^{|y|+1} \left( \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} \right) (x, y, z) \end{aligned}$$

(Los signos se deben a la regla de Koszul para los símbolos  $x, y, z \in A$  y  $B_2$  que tiene grado 1).

Debido a la compatibilidad con el grado, los cactus  $\begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array}$  y  $\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array}$  actúan trivialmente en  $A_1$ , por lo tanto el asociador es idénticamente nulo en  $A_1$ .  $\square$

**Observación 4.8.** Notar que la compatibilidad con el grado es esencial en el lema anterior: el producto preLie resulta asociativo en  $A_1$  aún cuando no lo sea en  $A$ . Por ejemplo, en el complejo de Hochschild de un álgebra asociativa, la composición de Gerstenhaber es asociativa en los elementos de grado uno.

A partir de este momento nos dedicaremos al caso  $A = \overline{TV}$ . Estudiaremos dentro del mismo estructuras de  $sCacti$ -álgebras que extiendan a la estructura de álgebra asociativa (libre) y sean compatibles con el grado.

Observemos que el grado que estamos considerando es el grado tensorial, por lo tanto un cactus de dimensión  $d$  actúa como una operación de grado  $-d$  y el diferencial sube el grado en 1.

**Observación 4.9.** Una operación (no unitaria)  $*$  :  $V \times V \rightarrow V$  se puede extender a  $H := V \oplus k1_H$  decretando que  $1_H$  sea el neutro formal de  $*$ :

$$1_H * v := v =: v * 1_H \quad (\forall v \in V) \quad \text{y} \quad 1_H * 1_H := 1_H$$

Notar que si  $*$  es asociativa en  $V$ , entonces esta extensión resulta asociativa en  $H$  y (obviamente) unitaria. Recordar que el diferencial restringido a  $V$  induce una comultiplicación counitaria  $\Delta$  en  $H$  vía:

$$\begin{aligned} \Delta 1_H &= 1_H \otimes 1_H \\ \Delta v &= d_e(v) + v \otimes 1_H + 1_H \otimes v \end{aligned}$$

Sabemos que  $d_e^2 = 0$  y por lo tanto  $\Delta$  es coasociativa.

De esta manera, si  $A = \overline{TV}$  es una  $s\mathcal{C}acti$ -álgebra que extiende la estructura de álgebra asociativa libre de manera compatible con el grado, se tiene que  $H$ , así definida, es a su vez simultáneamente un álgebra asociativa y una coálgebra asociativa, unitaria y counitaria. El siguiente teorema muestra que  $H$  es biálgebra (es decir, ambas estructuras son compatibles) y en realidad la estructura de  $s\mathcal{C}acti$ -álgebra de  $\overline{TV}$  y la estructura de biálgebra de  $H$  se determinan mutuamente.

El siguiente teorema es el aporte original más importante de esta sección. Este teorema dice, en particular, que si  $C$  es una  $dg$ -coálgebra coaumentada, las estructuras de  $dg$ -biálgebra en  $C$  están en correspondencia uno a uno con las estructuras de  $s\mathcal{C}acti$ -álgebra en  $\Omega C$  (que extienden la estructura de álgebra asociativa diferencial y son) compatibles con el grado.

**Teorema 4.10.** *Sea  $V$  un espacio vectorial graduado, son equivalentes:*

- (i) *Dar una estructura de  $s\mathcal{C}acti$  álgebra en  $\overline{TV}$ , que extienda la estructura de álgebra asociativa libre y sea compatible con el grado.*
- (ii) *Dar una estructura de biálgebra diferencial graduada (unitaria y counitaria) en  $H = V \oplus k1_H$ .*

Más precisamente, a partir de (i), el diferencial en  $\overline{TV}$  da lugar a un diferencial (interno) y una comultiplicación en  $V$  (ver observación 4.2) (que se extienden a  $H$ ). Por otra parte, la acción de  $B_2$ , al restringirse a elementos de  $V$ , induce un producto asociativo en  $V$  (ver lema 4.7) y éste determina un producto asociativo y unitario en  $H$ . Así,  $H$  resulta una biálgebra diferencial graduada (unitaria y counitaria).

Recíprocamente, si se tiene (ii), la comultiplicación da lugar a un diferencial externo en  $\overline{TV}$ . Veremos que hay una única manera de extender la restricción a  $V$  del producto de  $H$  a todo  $\overline{TV}$  para definir la acción de  $B_2$  de manera de cumplir la condición de compatibilidad con el grado. De forma inductiva y buscando que se cumpla dicha condición, se definen los  $B_m$  para  $m > 2$ .

*Demostración.* Antes de seguir adelante, nos proponemos utilizar la siguiente notación. Los elementos de  $V$  se notarán por  $x, y, z, v, w$ , etc. Elementos en  $\overline{TV}$ , homogéneos de grado mayor, en cambio, serán  $\mathbf{x} = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ , etc. Por último,  $\overline{\mathbf{x}}$  será la manera de abreviar  $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r \in (\overline{TV})^r$

Recordamos que utilizamos la notación  $\Delta x = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ .

### (i) determina (ii)

Esto es, supongamos que se tiene una estructura de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra en  $\overline{TV}$  que extiende la asociativa y compatible con el grado.

Consideramos entonces  $H = V \oplus k1_H$ , con  $\Delta 1 = 1 \otimes 1$  y  $V = \ker \epsilon$ . A  $1_H$  le asignamos grado interno cero, y grado externo uno.

- Notemos primero que un diferencial en  $\overline{TV}$  está determinado por su restricción a  $V$ , y el hecho de que esté dado por un diferencial interno  $d_i$  y uno externo  $d_e$ , cada uno con bigrado  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  respectivamente nos dice que  $d_V := d_i|_V : V \rightarrow V$  sube el grado interno de  $V$  y  $\Delta' := d_e|_V : V \rightarrow V \otimes V$  (que resulta homogéneo con respecto al grado interno) dado por

$$\Delta'(v) := v_1 \otimes v_2, \text{ donde } v_1 \otimes v_2 = d_e(v).$$

Como vimos en la observación 4.1. a partir de la bigraduación se tiene que la condición  $d^2 = (d_i + d_e)^2$  equivale a tres ecuaciones  $d_V^2 = 0$ , la coasociatividad de  $\Delta'$  y que  $\Delta'$  y  $d_V$  son compatibles (esto es,  $\Delta'$  es un morfismo de complejos).

En otras palabras, si se piensa el diferencial en  $\overline{TV}$  como una estructura de coalgebra coasociativa a menos de homotopía en  $V$ , la hipótesis de grado dice que esta es una coálgebra estricta (diferencial).

Consideramos la comultiplicación dada por:

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\Delta} V \otimes V \\ v &\mapsto d_e v + [1_H, v] \end{aligned}$$

- En segundo lugar, por el lema 4.7, sabemos que la acción del cactus  restringida a  $V$  define un producto asociativo vía:

$$x * y := (-1)^{|x|} \text{cactus}(x, y)$$

Se extiende este producto a  $H$  decretando al elemento 1 como la unidad.

- Ahora veamos que ambas estructuras son compatibles, es decir, si notamos

$$\Delta(x * y) = (-1)^{|x_{(2)}| |y_{(1)}|} (x_{(1)} * y_{(1)}) \otimes (x_{(2)} * y_{(2)})$$

Para esto, recordemos que  $da = \Delta(a) - [1, a] + d_i$ . Recordemos que si  $|a|_H$  es el grado de  $a$  en  $H$ , su grado en  $\overline{TV}$  es  $|a| = |a|_H + 1$  y, por consiguiente, el (super)conmutador se calcula como

$$[1, a] = 1 \otimes a - (-1)^{|a|} a \otimes 1 = 1 \otimes a - (-1)^{|a|_H + 1} a \otimes 1$$

Ahora, en toda *Cacti*-álgebra se tiene

$$\text{cactus}_1 - \text{cactus}_2 = \delta \text{cactus} = d \text{cactus} + \text{cactus} d$$

ya que la primera igualdad es al calcular el borde del cactus y la segunda es la compatibilidad entre los diferenciales. Al evaluar en  $x, y \in V$ , dado que  $d = \Delta - [1, \ ] + d_i$ , se tiene

$$\begin{aligned} \text{cactus}_1 - \text{cactus}_2(x, y) &= d \text{cactus}(x, y) + \text{cactus}(dx, y) + (-1)^{|x|} \text{cactus}(x, dy) \\ \text{cactus}_1 - \text{cactus}_2(x, y) &= \Delta(\text{cactus}(x, y)) + \text{cactus}(\Delta x, y) + (-1)^{|x|} \text{cactus}(x, \Delta y) \\ &\quad - [1, \text{cactus}(x, y)] - \text{cactus}([1, x], y) - (-1)^{|x|} \text{cactus}(x, [1, y]) \\ &\quad + d_i(\text{cactus}(x, y)) + \text{cactus}(d_i x, y) + (-1)^{|x|} \text{cactus}(x, d_i y) \end{aligned}$$

equivalentemente (al cambiar la notación de  por la  $*$ )

$$\begin{aligned}
 -[x, y] &= (-1)^{|x|} \Delta(x * y) + (-1)^{|x|+1} \Delta x * y + x * \Delta y \\
 &+ -(-1)^{|x|} [1, x * y] - (-1)^{|x|+1} [1, x] * y - x * [1, y] \\
 &+ (-1)^{|x|} d_i(x * y) + (-1)^{|x|+1} d_i x * y + x * d_i y
 \end{aligned}$$

Lo que buscamos ver (esto es,  $\Delta(x * y) = (-1)^{|x(2)|i|y(1)|i} (x(1) * y(1)) \otimes (x(2) * y(2))$ ) se sigue de la ecuación anterior dado que se tiene:

$$\begin{aligned}
 d_i(x * y) &= d_i x * y + (-1)^{|x|i} x * d_i y \\
 [x, y] &= (-1)^{|x|} [1, x * y] - (-1)^{|x|} [1, x] * y \\
 x * [1, y] &= (-1)^{|x|+1} \Delta x * y \\
 x * \Delta y &= (-1)^{|x|+1+|x(2)|i|y(1)|i} (x(1) * y(1)) \otimes (x(2) * y(2))
 \end{aligned}$$

Las primera es sencillamente que el diferencial interno deriva el producto. La segunda es debida a la identidad en  $\mathcal{Cacti}$

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} = \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagdown \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagdown \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array}$$

ya que, al evaluar en  $x, y, z \in V$ , obtenemos que el producto  $*$  distribuye el  $\otimes$  a izquierda:

$$\begin{aligned}
 (a \otimes b) * c &= a \otimes (b * c) + (-1)^{|b|(|c|+1)} (a * c) \otimes b \\
 &= (a * 1) \otimes (b * c) + (-1)^{|b|(|c|+1)} (a * c) \otimes (b * 1)
 \end{aligned}$$

y de manera inmediata (al considerar  $a = 1, b = x$  y  $c = y$ ) se sigue dicha ecuación.

Las dos últimas ecuaciones tienen términos de la forma  $a * (b \otimes c)$  (del lado izquierdo). La idea central es que, en una  $\mathcal{Cacti}$ -álgebra, a pesar de que  $*$  no distribuye  $\otimes$  a derecha, la falla de la distributividad está dada por el borde de  $B_3$  y la compatibilidad con el grado nos permite controlarla. Así, obtendremos que  $a * (b \otimes c)$  no puede ser más que la acción diagonal.

Al calcular el borde del cactus  $B_3 = \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagdown \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array}$  obtenemos:

$$\delta \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagdown \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array} = \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ \textcircled{2} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ \textcircled{2} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \diagdown \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array}$$

Al evaluar en  $x, y, z \in V$ , se tiene

$$\begin{aligned}
\delta \text{ (diagrama)}(x, y, z) &= \left( \text{diagrama} - \text{diagrama} + \text{diagrama} \right)(x, y, z) \\
&= (-1)^{|x||y|+|x|+|y|} y \otimes (x * z) \\
&\quad - (-1)^{|x|} x * (y \otimes z) \\
&\quad + (-1)^{|x|} (x * y) \otimes z
\end{aligned}$$

Como además, debe ser  $\delta B_3 = dB_3 - B_3d$  en  $\overline{TV}$ , se tiene

$$\begin{aligned}
(\delta B_3)(x, y, z) &= \underbrace{d(B_3(x, y, z))}_{=0} - B_3(dx, y, z) \\
&\quad + (-1)^{|x|} \underbrace{B_3(x, dy, z)}_{=0} - (-1)^{|x|+|y|} \underbrace{B_3(x, y, dz)}_{=0}
\end{aligned}$$

(donde los términos que se anulan lo hacen debido a la compatibilidad con el grado). Luego,

$$-B_3(dx, y, z) = (-1)^{|x||y|+|x|+|y|} y \otimes (x * z) - (-1)^{|x|} x * (y \otimes z) + (-1)^{|x|} (x * y) \otimes z$$

Ahora bien, en elementos de grado tensorial 2,  $\mathbf{x} = x_1 \otimes x_2$ ,  $B_3$  actúa como

$$B_3(\mathbf{x}, y, z) = B_3(x_1 \otimes x_2, y, z) = (-1)^{|x_2|+|y|+|x_2||y|} (x_1 * y) \otimes (x_2 * z)$$

ya que en  $s\mathcal{Cacti}$  se tiene

$$\text{diagrama} \circ_1 \text{diagrama} = \text{diagrama} + \text{diagrama} + \text{diagrama}$$

donde sólo el segundo término actúa no trivialmente en  $V^{\otimes 4}$ .

Reemplazando en esta identidad  $\mathbf{x} = dx$ , o sea,

$$dx = \Delta(x) - [1_H, x] = x_{(1)} \otimes x_{(2)} - 1_H \otimes x + (-1)^{|x|} x \otimes 1_H$$

se tiene

$$\begin{aligned}
B_3(dx, y, z) &= B_3(x_{(1)} \otimes x_{(2)} - 1_H \otimes x + (-1)^{|x|} x \otimes 1_H, y, z) \\
&= (-1)^{|x_{(2)}|+|y|+|x_{(2)}||y|} (x_{(1)} * y) \otimes (x_{(2)} * z) \\
&\quad - (-1)^{|x|+|y|+|x||y|} y \otimes (x * z) \\
&\quad + (-1)^{|x|+1+|y|+1|y|} (x * y) \otimes z \\
&= (-1)^{|x_{(2)}|+|y|+|x_{(2)}||y|} (x_{(1)} * y) \otimes (x_{(2)} * z) \\
&\quad - (-1)^{|x|+|y|+|x||y|} y \otimes (x * z) \\
&\quad - (-1)^{|x|} (x * y) \otimes z
\end{aligned}$$

Se deduce entonces la siguiente ecuación:

$$x * (y \otimes z) = (-1)^{|x|+|x_{(2)}|+|y|+|x_{(2)}||y|} (x_{(1)} * y) \otimes (x_{(2)} * z)$$

de lo que deducimos, al hacer jugar a  $[1, y]$  el papel de  $y \otimes z$  en la ecuación anterior

$$x * [1, y] = (-1)^{|x|+1} \Delta x * y$$

O al reemplazar (nuevamente en la ecuación original)  $y \otimes z$  por  $\Delta y = y_{(1)} \otimes y_{(2)}$  (y observando que si  $v \in V$  entonces  $|v| = |v|_i + 1$ ):

$$x * (\Delta y) = (-1)^{|x|+1+|x_{(2)}|_i|y_{(1)}|_i} (x_{(1)} * y_{(1)}) \otimes (x_{(2)} * y_{(2)})$$

que es lo que restaba verificar.

## (ii) determina (i)

Recíprocamente, supongamos que se tiene en  $H$  una estructura de biálgebra. Consideramos en  $\overline{TV}$  la estructura de *sCacti*-álgebra dada por:

$$C_n(x_1, \dots, x_n) := x_1 \otimes \dots \otimes x_n$$

(dado que como álgebra asociativa es el álgebra libre en  $V$ )

$$B_m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{m-1} \leq n} \pm x_1 \otimes \dots \otimes (x_{i_1} * \mathbf{y}_1) \otimes \dots \otimes (x_{i_{m-1}} * \mathbf{y}_{m-1}) \otimes \dots \otimes x_n$$

donde en cada término  $\pm$  es el signo de Koszul de la permutación de los símbolos:

$$* \dots * x_1 \dots x_n \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{m-1} \mapsto x_1 \dots x_{i_1} * \mathbf{y}_1 x_{i_1+1} \dots x_{i_{m-1}} * \mathbf{y}_{m-1} \dots x_n.$$

Nuevamente aquí remarcamos que si  $x \in H$ , su símbolo en la expresión anterior no tiene grado 1 sino grado  $|x|_H + 1$ , y si  $\mathbf{y} = y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$ , entonces su símbolo tiene grado  $n + \sum_{i=1}^n |y_i|_H$ .

La verificación de que esta estructura es una *sCacti*-álgebra se consigue inductivamente.

Veamos primero de qué manera se define la acción de  en todo  $\overline{TV}$  a partir de su valor en  $V$ . Partimos entonces del producto asociativo  $*$  en  $V$  y, en consecuencia,

$$B_2(x, y) := (-1)^{|x|} x * y$$

Ahora bien, en la última parte del punto anterior, vimos que la condición de compatibilidad con el grado determina la acción de  $B_2$  en  $V \otimes V^{\otimes 2}$  vía:

$$\begin{aligned} x * (y \otimes z) &= (-1)^{|x|+|x_{(2)}|+|y|+|x_{(2)}||y|} (x_{(1)} * y) \otimes (x_{(2)} * z) \\ B_2(x, y \otimes z) &= B_2(x, C_2(y, z)) = B_3(\Delta x, y, z) \\ \img alt="A diagram of a cactus with two vertices and one edge, labeled with a 2 above the top vertex and a 1 below the bottom vertex." data-bbox="208 458 235 491"/>  $(x, y \otimes z) &= \img alt="A diagram of a cactus with three vertices and two edges, labeled with 3, 2, and 1 above the vertices." data-bbox="360 458 387 491"/>  $(x, y, z) = \img alt="A diagram of a cactus with three vertices and two edges, labeled with 3, 2, and 1 above the vertices." data-bbox="482 458 509 491"/>  $(\Delta x, y, z)$  \end{aligned}$$$$

(Donde las tres ecuaciones son equivalentes, sólo se cambia de lenguaje.)

El caso general se deduce de manera sencilla razonando inductivamente en el largo de  $\mathbf{y} = y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$ , concluyendo

$$B_2(x, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = B_{n+1}(\Delta^{n-1}(x), y_1, \dots, y_n)$$

Utilizaremos luego la expresión equivalente (por la coasociatividad de  $\Delta$ )

$$B_2(x, \mathbf{y}' \otimes \mathbf{y}'') = B_3(\Delta x, \mathbf{y}', \mathbf{y}'')$$

En particular, la acción del elemento  en todo  $V \otimes \overline{TV}$  queda determinada por su restricción a  $V \otimes V$ .

Como debe distribuir a izquierda, se define de manera unívoca en  $\overline{TV} \otimes \overline{TV}$  para  $\mathbf{x} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$  e  $\mathbf{y} = y_1 \otimes \cdots \otimes y_r$  vía:

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) * \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n (-1)^{|\mathbf{y}|(n-i)} x_1 \otimes \cdots \otimes (x_i * \mathbf{y}) \otimes \cdots \otimes x_n$$

A partir de esto y debido a que  $\overline{TV}$  es libre, la acción de los  $B_m$  en todo  $\overline{TV}$  queda determinada de la siguiente manera.

En la primer variable, si  $\mathbf{x} = x_1 \otimes \dots \otimes x_m$ , se lo parte en dos (de manera arbitraria pero no trivial)  $\mathbf{x}' \otimes \mathbf{x}'' = (x_1 \otimes \dots \otimes x_i) \otimes (x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_m)$  y se tiene entonces  $x = \mathcal{V}^1(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ . Ahora, dado que los  $B_m$  y  $\mathcal{V}^1$  cumplen

$$\mathcal{V}^1 \circ_1 B_m = \sum_k B_m \circ_1 \mathcal{V}^1$$

se debería tener, al evaluar en  $\mathbf{x} \in \overline{TV}$ ,  $\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{n-1}) \in \overline{TV}^{n-1}$ :

$$B_m(\mathbf{x}' \otimes \mathbf{x}'', \bar{\mathbf{y}}) = \sum_{k=1}^m (-1)^{\gamma_k} B_k(\mathbf{x}', \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{k-1}) \otimes B_{m-k+1}(\mathbf{x}'', \mathbf{y}^k, \dots, \mathbf{y}^{m-1})$$

donde  $\alpha_k = |\mathbf{x}'| + |\mathbf{y}^1| + \dots + |\mathbf{y}^{k-1}|$  y  $\beta_k = |\mathbf{x}''|(|\mathbf{y}^1| + \dots + |\mathbf{y}^{k-1}|)$  y por lo tanto  $\gamma_k := (m - k)\alpha_k + \beta_k$  es el signo de Koszul del  $k$ -ésimo término.

De esta manera, se define  $B_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{n-1})$  de manera inductiva.

Más aún, debido a la compatibilidad con el grado, se tiene que esta suma es en realidad (volviendo a pensar  $\mathbf{x} = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ )

$$B_m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{m-1} \leq n} \pm x_1 \otimes \dots \otimes (x_{i_1} * \mathbf{y}_1) \otimes \dots \otimes (x_{i_{m-1}} * \mathbf{y}_{m-1}) \otimes \dots \otimes x_n$$

(donde cada término tiene el signo de Koszul de la permutación de los símbolos  $* \dots * x_1 \dots x_n \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{m-1} \mapsto x_1 \dots x_{i_1} * \mathbf{y}_1 x_{i_1+1} \dots x_{i_{m-1}} * \mathbf{y}_{m-1} \dots x_n$ ).

En conclusión, la acción de los  $B_m$  queda determinada por la de  $\mathcal{V}^1$  gracias a la libertad de  $\overline{TV}$  y a la compatibilidad con el grado. Notamos que esta fórmula es la misma que la que obtuvo Kadeishvili [Kad05] (sin signos), estructura que fué utilizada por [Men04], por lo que ya sabemos que efectivamente debería resultar una *sCacti* álgebra. De cualquier manera, mostraremos explícitamente que se respetan las relaciones entre los generadores.

Respecto a la relación de composición, debemos verificar

$$B_n \circ_1 B_m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}) = B_n(B_m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}), \bar{\mathbf{z}})$$

para  $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}$  cualesquiera. Sin embargo, debido a que el álgebra está generada por la imagen de  $C_2$ , esta propiedad se deduce por inducción en el largo de  $\mathbf{x}$  a partir del caso  $\mathbf{x} = x \in V$ . Esto se debe a que, si ponemos  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' \otimes \mathbf{x}''$

$$\begin{aligned} B_n \circ_1 B_m(\mathbf{x}' \otimes \mathbf{x}'', \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}) &= B_n(B_m(\mathbf{x}' \otimes \mathbf{x}'', \bar{\mathbf{y}}), \bar{\mathbf{z}}) \\ B_n \circ_1 B_m(C_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}) &= B_n(B_m(C_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \bar{\mathbf{y}}), \bar{\mathbf{z}}) \end{aligned}$$

Pero los cactus  $B_n, B_m, C_2$  se relacionan por

$$\begin{aligned} B_n \circ_1 (B_m \circ_1 C_2) &= \text{Diagram 1} \circ_1 (\text{Diagram 2} \circ_1 \text{Diagram 3}) \\ &= \sum_{\text{posibilidades}} \pm \text{Diagram 4} = \sum_{k,j} \pm \text{Diagram 5} \end{aligned}$$

donde (el signo está dado por la permutación de los puntos de  $B_n$  y  $B_m$  y) usamos la relación

$$\text{Diagram 1} \circ_1 \text{Diagram 3} = \sum_k \text{Diagram 6}$$

Ahora bien, en el caso  $\mathbf{x} = x$ , la expresión a verificar es

$$\begin{aligned} B_n \circ_1 B_m(x, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}) &= B_n(B_m(x, \bar{\mathbf{y}}), \bar{\mathbf{z}}) \\ \sum_{\text{posibilidades}} \pm \text{Diagram 7} (x, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}) &= \text{Diagram 8} \circ_1 (\text{Diagram 9} (x, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})) \end{aligned}$$

que son trivialmente nulos si  $m > 2$  debido a la compatibilidad con el grado. Esto reduce la verificación al caso  $m = 2$ , o sea  $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}$ . Tenemos entonces, que ver que resultan iguales

$$\begin{aligned} B_n \circ_1 B_2(x, \mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}}) &= B_n(B_2(x, \mathbf{y}), \bar{\mathbf{z}}) \\ \sum_{\text{posibilidades}} \pm \text{Diagram 10} (x, \mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}}) &= \text{Diagram 11} \circ_1 (\text{Diagram 12} (x, \mathbf{y}), \bar{\mathbf{z}}) \end{aligned}$$



Por último, veamos que se puede reducir al caso  $\mathbf{z} = z$ , es decir  $|\mathbf{z}|_e = 1$ .  
Poniendo  $\mathbf{z} = \mathbf{z}' \otimes \mathbf{z}''$  y usando que

$$\begin{aligned}\Delta(x * y) &= \Delta(x) *^{\otimes 2} \Delta(y) \\ a * (\mathbf{z}' \otimes \mathbf{z}'') &= \Delta(a) *^{\otimes 2} (\mathbf{z}' \otimes \mathbf{z}'')\end{aligned}$$

Obtenemos del lado derecho

$$\begin{aligned}(x * (y * \mathbf{z})) &= (x * (y * (\mathbf{z}' \otimes \mathbf{z}''))) \\ &= (x * (\Delta y *^{\otimes 2} (\mathbf{z}' \otimes \mathbf{z}''))) \\ &= (\Delta x *^{\otimes 2} (\Delta y *^{\otimes 2} (\mathbf{z}' \otimes \mathbf{z}''))) \end{aligned}$$

y del lado izquierdo

$$\begin{aligned}((x * y) * \mathbf{z}) &= ((x * y) * (\mathbf{z}' \otimes \mathbf{z}''))) \\ &= (\Delta(x * y) *^{\otimes 2} (\mathbf{z}' \otimes \mathbf{z}''))) \\ &= ((\Delta x *^{\otimes 2} \Delta y) *^{\otimes 2} (\mathbf{z}' \otimes \mathbf{z}''))) \end{aligned}$$

Luego, el caso general se deduce de

$$(x * (y * z)) = ((x * y) * z)$$

que es cierto por hipótesis.

Para la compatibilidad con el diferencial, debemos verificar que

$$\delta B_m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) = d(B_m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})) + (-1)^{m-1} B_m(d\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{\omega_j} B_m(\mathbf{x}, d_j \bar{\mathbf{y}})$$

para  $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{m-1})$ , donde  $\omega_j = m - 1 + |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}^1| + \dots + |\mathbf{y}^{j-1}|$  y abreviando  $d_j \bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}^1, \dots, d\mathbf{y}^j, \dots, \mathbf{y}^{m-1})$ .

Nuevamente argumentaremos en forma inductiva en el grado tensorial de  $\mathbf{x}$ .  
Poniendo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' \otimes x''$  (es decir,  $|x''|_e = 1$ ) y

$$\begin{aligned}\alpha_k &= |\mathbf{x}'| + |\mathbf{y}^1| + \dots + |\mathbf{y}^{k-1}| \\ \beta_k &= |x''|(|\mathbf{y}^1| + \dots + |\mathbf{y}^{k-1}|) \\ \gamma_k &= (m - k)\alpha_k + \beta_k\end{aligned}$$

utilizando la notación  $\vec{\mathbf{y}}^{k-1} = (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{k-1})$ ,  ${}^k\vec{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}^k, \dots, \mathbf{y}^{m-1})$ , se tienen

$$\begin{aligned}
\delta B_m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) &= \delta B_m(\mathbf{x}' \otimes x'', \bar{\mathbf{y}}) \\
&= (\delta B_m) \circ_1 C_2(\mathbf{x}', x'', \bar{\mathbf{y}}) \\
&= \delta(B_m \circ_1 C_2)(\mathbf{x}', x'', \bar{\mathbf{y}}) \\
&= \delta \left( \sum_{k=1}^m (C_2 \circ_1 B_k) \circ_{k+1} B_{m-k+1} \right) (\mathbf{x}', x'', \bar{\mathbf{y}}) \\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^{\gamma_k} (\delta B_k)(\mathbf{x}', \vec{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes B_{m-k+1}(x'', {}^k\vec{\mathbf{y}}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^m (-1)^{\gamma_k + \alpha_k + k-1} B_k(\mathbf{x}', \vec{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes (\delta B_{m-k+1})(x'', {}^k\vec{\mathbf{y}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(B_m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})) &= d(B_m(\mathbf{x}' \otimes x'', \bar{\mathbf{y}})) \\
&= d \left( \sum_{k=1}^m (-1)^{\gamma_k} B_k(\mathbf{x}', \vec{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes B_{m-k+1}(x'', {}^k\vec{\mathbf{y}}) \right) \\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^{\gamma_k} d(B_k(\mathbf{x}', \vec{\mathbf{y}}^{k-1})) \otimes B_{m-k+1}(x'', {}^k\vec{\mathbf{y}}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^m (-1)^{\gamma_k + \alpha_k + k-1} B_k(\mathbf{x}', \vec{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes d(B_{m-k+1}(x'', {}^k\vec{\mathbf{y}}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_m(d\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) &= B_m(d(\mathbf{x}' \otimes x''), \bar{\mathbf{y}}) \\
&= B_m(d\mathbf{x}' \otimes x'', \bar{\mathbf{y}}) + (-1)^{|\mathbf{x}'|} B_m(\mathbf{x}' \otimes dx'', \bar{\mathbf{y}}) \\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^{\gamma_k + m-k} B_k(d\mathbf{x}', \vec{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes B_{m-k+1}(x'', {}^k\vec{\mathbf{y}}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^m (-1)^{\gamma_k + \alpha_k} B_k(\mathbf{x}', \vec{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes B_{m-k+1}(dx'', {}^k\vec{\mathbf{y}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_m(\mathbf{x}, d_j \bar{\mathbf{y}}) &= B_m(\mathbf{x}' \otimes x'', \mathbf{y}^1, \dots, d\mathbf{y}^j, \dots, \mathbf{y}^{m-1}) \\
&= \sum_{k=i+1}^{m-1} (-1)^{\gamma_k+m-k+1} B_k(\mathbf{x}', \mathbf{y}^1, \dots, d\mathbf{y}^j, \mathbf{y}^{k-1}) \otimes B_{m-k+1}(x'', {}^k \bar{\mathbf{y}}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^i (-1)^{\gamma_k} B_k(\mathbf{x}', \bar{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes B_{m-k+1}(x'', \mathbf{y}^k, \dots, d\mathbf{y}^j, \dots, \mathbf{y}^{m-1}) \\
&= \sum_{k=i+1}^{m-1} (-1)^{\gamma_k+m-k+1} B_k(\mathbf{x}', d_j \bar{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes B_{m-k+1}(x'', {}^k \bar{\mathbf{y}}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^i (-1)^{\gamma_k} B_k(\mathbf{x}', \bar{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes B_{m-k+1}(x'', d_j {}^k \bar{\mathbf{y}})
\end{aligned}$$

Al sumar en  $j$  e intercambiar el orden de las sumas, se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{\omega_j} B_m(\mathbf{x}, d_j \bar{\mathbf{y}}) &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{\gamma_k + \bar{\omega}'_j} B_k(\mathbf{x}', d_j \bar{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes B_{m-k+1}(x'', {}^k \bar{\mathbf{y}}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=k}^{m-1} (-1)^{\gamma_k + \omega_j} B_k(\mathbf{x}', \bar{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes B_{m-k+1}(x'', d_j {}^k \bar{\mathbf{y}})
\end{aligned}$$

donde  $\bar{\omega}'_j := \omega_j + k - m + |x''|$ .

Razonando de manera inductiva en  $|\mathbf{x}|_e$ , podemos suponer

$$\begin{aligned}
\delta B_k(\mathbf{x}', \bar{\mathbf{y}}^{k-1}) &= d(B_k(\mathbf{x}', \bar{\mathbf{y}}^{k-1}) + (-1)^{k-1} B_k(dx', \bar{\mathbf{y}}^{k-1}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{\omega'_j} B_k(\mathbf{x}', d_j \bar{\mathbf{y}}^{k-1}) \\
\delta B_{m-k+1}(x'', {}^k \bar{\mathbf{y}}) &= d(B_{m-k+1}(x'', {}^k \bar{\mathbf{y}}) + (-1)^{m-k} B_{m-k+1}(dx'', {}^k \bar{\mathbf{y}}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-k} (-1)^{\omega''_j} B_{m-k+1}(x'', d_j {}^k \bar{\mathbf{y}})
\end{aligned}$$

donde  $\omega'_j = k-1 + |\mathbf{x}'| + |\mathbf{y}^1| + \dots + |\mathbf{y}^{j-1}|$  y  $\omega''_j = m-k + |x''| + |\mathbf{y}^k| + \dots + |\mathbf{y}^{j-1}|$ .

La identidad que se desea verificar se deduce de manera inductiva sumando

$$\sum_{k=1}^{m-1} ((-1)^{\gamma_k} \text{---}_1 \otimes B_{m-k+1}(x'', {}^k \bar{\mathbf{y}}) + (-1)^{\gamma_k + \alpha_k + k-1} B_k(\mathbf{x}', \bar{\mathbf{y}}^{k-1}) \otimes \text{---}_2)$$

donde  $\text{---}_1$  y  $\text{---}_2$  se reemplazan por sendos miembros de ambas ecuaciones.

Notar que los signos coinciden ya que:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}'_j &= \omega'_j \\ \omega_j &= \alpha_k + k - 1 + \omega''_j\end{aligned}$$

Veamos entonces el caso de grado tensorial 1, es decir, verifiquemos que

$$\delta B_m(x, \bar{\mathbf{y}}) = d(B_m(x, \bar{\mathbf{y}})) + (-1)^{m-1} B_m(dx, \bar{\mathbf{y}}) + \sum_i (-1)^{\omega_j} B_m(x, d_j \bar{\mathbf{y}})$$

Por la condición de compatibilidad con el grado, si  $m \geq 4$  todos los terminos involucrados son cero; los únicos casos no triviales son con  $B_2$  y  $B_3$ .

Caso  $m = 3$ :

Queremos verificar

$$\delta B_3(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \overbrace{d B_3(x, \mathbf{y}, \mathbf{z})}^{=0} - B_3(dx, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - (-1)^{|\mathbf{x}|} \overbrace{B_3(x, d\mathbf{y}, \mathbf{z})}^{=0} - (-1)^{|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|} \overbrace{B_3(x, \mathbf{y}, d\mathbf{z})}^{=0}$$

Dado que en  $s\mathcal{Cacti}$

$$\delta \left( \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} - \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array}$$

lo que queremos es

$$\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} (dx, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \left( - \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) (x, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Ahora bien, cuando evaluamos  $B_3$  en elementos de grado externo dos, por ejemplo,  $a \otimes b$  es inmediato de la condición de compatibilidad con el grado que

$$\begin{aligned}\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} (a \otimes b, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} (a \otimes b, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &= \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} (a \otimes b, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &= \begin{array}{c} 4 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} (a, b, \mathbf{y}, \mathbf{z})\end{aligned}$$

Como  $dx = \Delta x - 1_H \otimes x + (-1)^{|x|} x \otimes 1_H + d_i x$ , lo que queremos verificar se desprende de

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} (\Delta x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} (x_{(1)} \otimes x_{(2)}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\
&= \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} (x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\
\begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} (1_H \otimes x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \begin{array}{c} \textcircled{4} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} (1_H, x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\
&= \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} (x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\
\begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} (x \otimes 1_H, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \begin{array}{c} \textcircled{4} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} (x, 1_H, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\
&= \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \end{array} (x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\
\begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} (d_i x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= 0
\end{aligned}$$

Caso  $m = 2$ :

Hay que verificar para  $x \in V$  e  $\mathbf{y} \in TV$

$$\delta B_2(x, \mathbf{y}) = dB_2(x, \mathbf{y}) + B_2(dx, \mathbf{y}) + (-1)^{|x|} B_2(x, d\mathbf{y})$$

o, en notación \*:

$$\begin{aligned}
(-1)^{|x||\mathbf{y}|} \mathbf{y} \otimes x - x \otimes \mathbf{y} &= (-1)^{|x|} d(x * \mathbf{y}) - (-1)^{|x|} (dx) * \mathbf{y} + x * d\mathbf{y} \\
-[x, \mathbf{y}] &= (-1)^{|x|} d(x * \mathbf{y}) - (-1)^{|x|} (dx) * \mathbf{y} + x * d\mathbf{y}
\end{aligned}$$

Recordemos que el diferencial total  $d$  en  $TV$  se descompone como

$$d = D - [1_H, \cdot] + D_i$$

donde  $D$  es la única superderivación de  $TH$  (no de  $TV$ ) que coincide con  $\Delta$  en  $H$ ,  $[1_H, -]$  es el superconmutador, con respecto a  $\otimes$ , con  $1_H$  y  $D_i$  es la

extensión a  $TH$  de  $d_i$ . Por lo tanto, lo que debemos verificar es

$$\begin{aligned} -[x, \mathbf{y}] &= (-1)^{|x|} D(x * \mathbf{y}) - (-1)^{|x|} \Delta x * \mathbf{y} + x * D\mathbf{y} \\ &- (-1)^{|x|} [1_H, x * \mathbf{y}] + (-1)^{|x|} [1_H, x] * \mathbf{y} - x * [1_H, \mathbf{y}] \\ &+ (-1)^{|x|} D_i(x * \mathbf{y}) - (-1)^{|x|} (d_i x) * \mathbf{y} + x * D_i \mathbf{y} \end{aligned}$$

Lo que es cierto, debido a los siguientes hechos:

- El último renglón es idénticamente nulo, ya que  $D_i$  deriva a  $*$ .
- Por otra parte, dado que  $\Delta$  es  $H$ -lineal (respecto a la acción diagonal en  $H \otimes H$ ), entonces su extensión también lo es:

$$D(x * \mathbf{y}) = (-1)^{|x|+1} x * D(\mathbf{y}), \forall x \in V, \mathbf{y} \in TV$$

- Por la distributividad de  $*$  respecto de  $\otimes$  a izquierda, se tiene

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] * \mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b} * \mathbf{c}] + (-1)^{|\mathbf{b}|(|\mathbf{c}|-1)} [\mathbf{a} * \mathbf{c}, \mathbf{b}]$$

En particular,  $[1_H, x] * \mathbf{y} = [1_H, x * \mathbf{y}] - (-1)^{|x|} [x, \mathbf{y}]$ .

- A partir de  $B_2(a, \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = B_3(\Delta a, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  tenemos que

$$x * [1_H, \mathbf{y}] = \Delta x * \mathbf{y} = (-1)^{|x|}$$

□

Como mencionamos en la introducción del apartado, al pasar a la homología se recupera el resultado conocido que presentamos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.11.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y consideremos  $H = U(\mathfrak{g})$  y como siempre  $V = \overline{U}(\mathfrak{g}) = \text{Ker}(\epsilon : U(\mathfrak{g}) \rightarrow k)$ , entonces la cohomología de  $\overline{TV}$  es

$$H^\bullet(\overline{TV}) \simeq \Lambda^\bullet \mathfrak{g}$$

(Donde aquí  $\Lambda \mathfrak{g}$  es el álgebra exterior no unitaria en  $\mathfrak{g}$ . Si, en cambio, considerásemos en la homología de  $TV$ , tendríamos el isomorfismo con el álgebra exterior unitaria en  $\mathfrak{g}$ .) Más aún, en grado uno el corchete de Lie de  $H^1(\overline{TV}, d)$  es el conmutador en los elementos primitivos de  $U\mathfrak{g}$ , es decir, el corchete de Lie en  $\mathfrak{g}$ . Dado que  $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}$  está generada (como álgebra) en grado uno, la estructura de Gerstenhaber queda determinada por el corchete en ese grado.

Se recupera de esta manera la estructura estándar de álgebra de Gerstenhaber en  $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}$  a partir de la estructura de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra en  $\overline{TV}$ . En otras palabras, la estructura de álgebra de Gerstenhaber en  $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}$  para un álgebra de lie  $\mathfrak{g}$  se levanta a una estructura de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra compatible con el grado en  $\overline{TV} = \overline{T}(\overline{U}(\mathfrak{g}))$ .

Como subejemplo de lo anterior, podemos considerar el caso  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(W)$  el álgebra de Lie libre en un espacio vectorial  $W$ . Luego,  $\Lambda^\bullet \mathfrak{g} = \Lambda^\bullet \text{Lie}(W)$  es el álgebra de Gerstenhaber libre en  $W$ . Esta estructura “se levanta” a una estructura de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra en  $\overline{TV} = \overline{T}(\overline{U}(\text{Lie}(W))) = \overline{T} \overline{TW}$ , en el sentido de que la estructura de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra induce la estructura de Gerstenhaber de su homología.

## 4.2. Morfismos y compatibilidad con grado

**Notación:** Si  $T = \bigoplus T^{p,q}$  es una  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra bigraduada, denotamos por

$$T_n := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} T^{p,n}$$

El siguiente lema muestra que es relativamente sencillo chequear que un morfismo sea de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebras, si el mismo está definido sobre álgebras compatibles con el grado.

**Lema 4.12.** *Sean  $T$  y  $C$  dos  $\mathcal{Cacti}$ -álgebras bigraduadas, con estructura compatible con el grado y sea  $f : T \rightarrow C$  una transformación lineal, homogénea de grado cero con respecto a la bigraduación. Si asumimos que*

- $T$  está generada por  $T_1 := \bigoplus_p T^{p,1}$  como álgebra asociativa (en particular,  $T = \bigoplus_{n \geq 1} T_n$ ),
- $f$  es un morfismo de álgebras asociativas,
- $f(dt) = df(t)$  para todo  $t \in T_1$ ,
- $f|_{T_1} : (T_1, *) \rightarrow (C_1, *)$  es un morfismo de álgebras asociativas,

entonces,  $f$  es un morfismo de  $\mathcal{Cacti}$ -álgebras.

*Demostración.* Notemos por  $\cup$  al producto asociativo dado por  $C_2$ .

Vale mencionar que de manera análoga a lo que sucede en el teorema 4.10 los signos están dados por la regla de Koszul. Sin embargo, en esta demostración no es necesario explicitarlos y se omiten para mayor claridad.

Hacemos las siguientes reducciones:

1. Si  $f(B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = B_2(f\mathbf{x}, f\mathbf{y})$ , entonces  $f(M, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = f(M, f\mathbf{x}_1, \dots, f\mathbf{x}_n)$  para todo cactus  $M$ .

*Demostración.* Como el operad  $s\mathcal{Cacti}$  está generado por los cactus  $C_2$  y los  $B_m$ , basta ver que  $f$  conmuta con estas operaciones. Como  $f$  es morfismo de álgebras asociativas, por definición, conmuta con la acción de  $C_2$ . Para reducir ahora de  $B_m$  a  $B_2$  razonamos por inducción, con argumentos similares al teorema 4.10. Recordemos la identidad

$$\text{Cactus}(m, 1) \circ_1 \text{Cactus}(2, 1) = \sum_k \text{Cactus}(m, 1)$$

Si tenemos  $B_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m-1})$ , con  $\mathbf{x} \in T^{p, \bullet}$ , por la compatibilidad con el grado, debe ser  $p \geq m$  para que la expresión se a no trivial. Poniendo  $\mathbf{x} = x_1 \cup \mathbf{x}'$  (dado que  $T$  está generada por  $T_1$  como álgebra asociativa) se tiene

$$B_m((x_1 \cup \mathbf{x}'), \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m-1}) = \sum_{k=1}^m \pm B_k(x_1, \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{k-1}) \cup B_{m-k+1}(\mathbf{x}', \mathbf{y}^k, \dots, \mathbf{y}^{m-1})$$

que por compatibilidad con el grado (como  $|x_1|_e = 1$ , son todos nulos salvo dos y se tiene

$$B_m(C_2(x_1, \mathbf{x}'), \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m) = \pm C_2(x_1, B_m(\mathbf{x}', \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{m-1})) \pm C_2(B_2(x_1, y_1), B_{m-1}(\mathbf{x}', \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^{m-1}))$$

donde el primer término tiene  $|x'| < |x|$  y el segundo se escribe utilizando  $B_2$  y  $B_{m-1}$ . Luego,  $f$  conmuta con los  $B_m$  si lo hace con  $B_2$   $\square$

2. Si  $fB_2(x, \mathbf{y}) = B_2(fx, f\mathbf{y})$  para todo  $x \in T_1, \mathbf{y} \in T$ , entonces  $fB_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B_2(f\mathbf{x}, f\mathbf{y})$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T$ ,

*Demostración.* Si  $\mathbf{x} = x_1 \cup \dots \cup x_r$ , como  $B_2$  distribuye el producto dado por  $C_2$  en la primera variable, se tiene

$$B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^r \pm x_1 \cup \dots \cup B_2(x_k, \mathbf{y}) \cup \dots \cup x_r$$

de lo que se deduce lo que buscamos.  $\square$

3. Si  $fB_2(x, y) = B_2(fx, fy)$  para todo  $x, y \in T_1$  (lo cual es cierto por hipótesis), entonces  $fB_2(x, \mathbf{y}) = B_2(fx, f\mathbf{y})$  para todo  $x \in T_1, \mathbf{y} \in T$ ,

*Demostración.* Sea  $\mathbf{y} = \mathbf{y}' \cup \mathbf{y}'' \in T$ , notar que tanto el grado de  $\mathbf{y}'$  como el de  $\mathbf{y}''$  es estrictamente menor que le de  $\mathbf{y}$ . Calculamos, para  $x \in T_1$ ,

$$B_2(x, \mathbf{y}) = B_2(x, \mathbf{y}' \cup \mathbf{y}'') = B_2 \circ_2 C_2(x, \mathbf{y}', \mathbf{y}'')$$

$$= \pm B_2(x, \mathbf{y}') \cup \mathbf{y}'' \pm \mathbf{y}' B_2(x, \mathbf{y}'') + (\delta B_3)(x, \mathbf{y}', \mathbf{y}'')$$

Notamos que (debido a que  $x \in T_1$  y  $T$  es compatible con grado):

$$\begin{aligned} (\delta B_3)(x, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') &= d(B_3(x, \mathbf{y}', \mathbf{y}'')) + B_3(dx, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') \pm B_3(x, d\mathbf{y}', \mathbf{y}'') \pm B_3(x, \mathbf{y}', d\mathbf{y}'') \\ &= B_3(dx, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') \end{aligned}$$

Ahora, dado que  $dx \in T_2$  y  $T$  esta generada por  $T_1$  como álgebra asociativa, podemos escribir  $dx$  como (una suma de elementos de la forma)  $dx = \sum x_1 \cup x_2$ , luego

$$\begin{aligned} B_3(dx, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') &= B_3(x_1 \cup x_2, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') \\ &= (B_3 \circ_1 C_2)(x_1, x_2, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') \\ &= \pm B_3(x_1, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') \cup x_2 \\ &\quad \pm B_2(x_1, \mathbf{y}') \cup B_2(x_2, \mathbf{y}'') \\ &\quad \pm x_1 \cup B_3(x_2, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') \\ &= \pm B_2(x_1, \mathbf{y}') \cup B_2(x_2, \mathbf{y}'') \end{aligned}$$

(hemos usado nuevamente que  $T$  es cacti-compatible con el grado, y que  $x_1$  y  $x_2$  pertenecen a  $T_1$ ).

Por lo tanto,

$$B_2(x, \mathbf{y}) = \pm B_2(x, \mathbf{y}') \cup \mathbf{y}'' \pm \mathbf{y}' B_2(x, \mathbf{y}'') \pm B_2(x_1, \mathbf{y}') \cup B_2(x_2, \mathbf{y}'')$$

Calculamos entonces,

$$f(B_2(x, \mathbf{y})) = f(\pm B_2(x, \mathbf{y}') \cup \mathbf{y}'' \pm \mathbf{y}' B_2(x, \mathbf{y}'') \pm B_2(x_1, \mathbf{y}') \cup B_2(x_2, \mathbf{y}''))$$

y como  $f$  es multiplicativa

$$= \pm fB_2(x, \mathbf{y}') \cup f\mathbf{y}'' \pm f\mathbf{y}' \cup fB_2(x, \mathbf{y}'') \pm fB_2(x_1, \mathbf{y}') \cup fB_2(x_2, \mathbf{y}'')$$

Como  $\mathbf{y}'$  y  $\mathbf{y}''$  tienen grado menor estricto que el de  $\mathbf{y}$  podemos asumir inductivamente que  $f$  preserva la operación  $B_2(x, -)$  en esos grados por lo tanto lo anterior es igual a

$$= \pm B_2(fx, f\mathbf{y}') \cup f\mathbf{y}'' \pm f\mathbf{y}' \cup B_2(fx, f\mathbf{y}'') \pm B_2(fx_1, f\mathbf{y}') \cup B_2(fx_2, f\mathbf{y}'')$$

y como  $f$  preserva los grados y también  $T'$  se asume compatible con el grado, los argumentos utilizados para eliminar los términos del tipo  $B_3(x, -)$  se pueden usar también para  $B_3(fx, -)$ , y concluimos

$$\begin{aligned} &= \pm B_2(fx, f\mathbf{y}') \cup f\mathbf{y}'' \pm f\mathbf{y}' \cup B_2(fx, f\mathbf{y}'') \pm B_2(fx_1 \cup fx_2, f\mathbf{y}' \cup f\mathbf{y}'') \\ &= \pm B_2(fx, f\mathbf{y}') \cup f\mathbf{y}'' \pm f\mathbf{y}' \cup B_2(fx, f\mathbf{y}'') \pm B_2(fdx, f(\mathbf{y}' \cup \mathbf{y}'')) \end{aligned}$$

y como  $f$  conmuta con el diferencial,  $fdx = d(fx)$  y así llegamos a

$$= B_2(fx, f\mathbf{y}' \cup f\mathbf{y}'') = B_2(fx, f\mathbf{y})$$

□

Como el requerimiento para usar la última reducción es válida por hipótesis del lema, hemos concluido su demostración. □

Es un corolario inmediato del lema anterior que el teorema 4.10 da lugar a una equivalencia de categorías

**Corolario 4.13.** Sean  $H$  y  $H'$  dos biálgebras (d.g.) unitarias y counitarias. Si se consideran, en vistas del teorema 4.10,  $\Omega H = \overline{T} \overline{H}$  y  $\Omega H' = \overline{T} \overline{H}'$  como álgebras de cactus se tiene una correspondencia

$$\text{Hom}_{\text{sCacti}}(\Omega H, \Omega H') \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\text{biálgebras d.g.}}(H, H')$$

*Demostración.* Las álgebras  $\Omega H$  y  $\Omega H'$  son compatibles con el grado. Además están generadas como álgebras asociativas por  $\overline{H}$  y  $\overline{H}'$  respectivamente. Un morfismo de biálgebras  $f : H \rightarrow H'$  queda determinado por la restricción  $\overline{f} : \overline{H} \rightarrow \overline{H}'$  que cumple las condiciones del lema anterior, por lo cual determina un morfismo de cacti álgebras  $f : \Omega H \rightarrow \Omega H'$ . □

**Observación 4.14.** La estructura de álgebra de cactus en  $\Omega H$  es única si se pide compatibilidad con el grado y que la acción de  $B_2$  coincida con el producto en  $H$ . Esto se debe a que si se considerara otra estructura de cactus  $\widetilde{\Omega H}$  con dichas propiedades, entonces la identidad  $\Omega H \rightarrow \widetilde{\Omega H}$  verificaría las hipótesis del lema y daría un isomorfismo de cacti álgebras.

A modo de aplicación del lema anterior, tenemos el siguiente teorema que puede ser visto como un agregado al diccionario entre los axiomas de biálgebras y los de Cacti. Antes del enunciado del teorema, recordamos la noción de modulo-álgebra.

**Definición 4.15.** Sea  $A$  un álgebra asociativa unitaria y  $H$  una biálgebra unitaria y counitaria. Una estructura de  $H$ -módulo álgebra en  $A$  es una flecha

$$H \otimes A \rightarrow A$$

que hace de  $A$  un  $H$ -módulo de manera tal que la multiplicación de  $A$

$$m_A : A \otimes A \rightarrow A$$

resulte un morfismo de  $H$ -módulos (con la acción diagonal en  $A \otimes A$ ).

En el caso en que  $A$  sea una d.g. álgebra y  $H$ , una d.g. biálgebra (unitaria y counitaria); una estructura de  $H$ -módulo álgebra en  $A$  se dice diferencial graduada (o simplemente d.g.) si

$$d(h(a)) = d_H(h)(a) + (-1)^{|h|}h(d_A(a))$$

o equivalentemente, que el morfismo estructural

$$\rho : H \otimes A \rightarrow A$$

conmute con el diferencial.

**Teorema 4.16.** Sea  $A$  una álgebra (d.g.) asociativa con unidad y  $H$  una biálgebra (d.g.) unitaria y counitaria. Existe una correspondencia 1-1 entre el conjunto de estructuras de  $H$ -módulo álgebra en  $A$  y el conjunto de morfismos de álgebras de cactus  $\{\Omega H \rightarrow C^\bullet(A)\}$

*Demostración.* Dado que  $\Omega H$  y  $C(A)$  son ambas compatibles con el grado, podemos usar el Lema 4.12, que dice que un morfismo entre álgebras cactus (con esa propiedad)  $f : \Omega H \rightarrow CA$  es lo mismo que un morfismo de álgebras (d.g.) tal que su restricción en elementos de grado uno sea multiplicativo con respecto a la operación  $*$ . Notar que la restricción a los elementos de grado uno de una  $f$  produce un morfismo

$$\rho := f|_V : V \rightarrow \text{End}(A)$$

Esto muestra que los morfismo graduados cuyas restricciones son multiplicativas con respecto a  $*$  es lo mismo que estructuras de  $V$ -módulo (no unitarias) en  $A$ , lo cual es lo mismo que estructuras de  $H$ -módulo unitario en  $A$ .

Notamos a su vez que, recíprocamente, dada  $\rho : H \rightarrow \text{End}(A)$ , una estructura de  $H$ -módulo en  $A$ , restringiéndola a  $V$  sigue siendo multiplicativa, y por la propiedad universal del álgebra tensorial, se extiende de manera única como morfismo de álgebras asociativas  $\hat{\rho} : \Omega H \rightarrow C(A)$ . El teorema entonces quedará demostrado si vemos que “ $\hat{\rho}$  conmuta con el diferencial si y sólo si la estructura de  $H$ -módulo es de  $H$ -módulo álgebra”.

Denotemos, para  $h \in H$  y  $a \in A$ ,

$$h(a) := (\rho(h))(a)$$

Al calcular el borde de Hochschild de  $\rho(h)$ ,

$$(d_e \rho(h))(a \otimes b) = -ah(b) + h(ab) - h(a)b$$

Por otra parte, el diferencial interno es

$$(d_i \rho(h))(a) = d(h(a)) - (-1)^{|h|} h(d(a))$$

Como  $d = d_e + d_i$ , pero los (bi)grados son diferentes, la igualdad

$$d\rho(h) = \hat{\rho}dh$$

equivale a dos ecuaciones

$$d_e \rho(h) = \hat{\rho}d_e h, \quad d_i \rho(h) = \rho d_i h$$

Por un lado, la ecuación con  $d_e$  nos dice que  $A$  es  $H$ -módulo álgebra, ya que

$$\begin{aligned} (\hat{\rho}d_i h)(a \otimes b) &= (\hat{\rho}(\Delta h - 1_H \otimes h - h \otimes 1_H))(a \otimes b) \\ &= (\hat{\rho}(h_1 \otimes h_2 - 1_H \otimes h - h \otimes 1_H))(a \otimes b) \\ &= h_1(a)h_2(b) - h(a)b - ah(b) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\partial \rho(h) = \hat{\rho}d_i h \iff h(ab) = h_1(a)h_2(b)$$

Para finalizar, la ecuación  $d_i \rho(h) = \rho d_i h$  dice

$$(d_i \rho(h))(a) = d_A(h(a)) - (-1)^{|h|} h(d_A(a)) = d_H(h)(a)$$

es decir, la condición d.g. para  $\rho$ . □

Como corolario inmediato tenemos

**Corolario 4.17.** *Sea  $A$  un álgebra asociativa (d.g),  $H$  una biálgebra (d.g), y  $\rho : H \otimes A \rightarrow A$  una estructura de  $H$ -módulo álgebra (d.g), entonces  $\rho$  induce un morfismo de álgebras de Gerstenhaber*

$$H^\bullet(\Omega H, d) \rightarrow HH^\bullet(A)$$

## Ejemplos

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $H = U(\mathfrak{g})$ , una estructura de  $H$ -modulo álgebra en  $A$  es lo mismo que una acción de  $\mathfrak{g}$  en  $A$  por derivaciones. Si tomamos  $\mathfrak{g} = \text{Der}(A)$ , entonces el morfismo  $\Omega H \rightarrow C(A)$  induce en homología una flecha

$$\Lambda^\bullet \text{Der}(A) \rightarrow HH^\bullet(A)$$

cuya imagen es la subálgebra asociativa generada por las derivaciones.

Esto muestra que en general los morfismo construidos de esta forma son no triviales. Sin embargo, podría ocurrir que una biálgebra  $H$  no contribuya con ninguna derivación, aunque sí diera lugar a elementos en grados mas altos.

Desarrollamos a continuación el ejemplo de menor tamaño que no es trivial en este sentido. Sea  $H = k1 \oplus kx \oplus kg \oplus kgx$  el álgebra (de Sweedler, o de Taft) de dimensión 4, descrita en términos de generadores y relaciones como la  $k$ -álgebra<sup>1</sup> generada por  $x$  y  $g$  con relaciones

$$x^2 = 0, \quad g^2 = 1, \quad xg = -gx$$

que resulta una biálgebra con la comultiplicación

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad \Delta x = x \otimes 1 + g \otimes x$$

Este álgebra no tiene elementos primitivos, por lo que  $H^1(\Omega H) = 0$ , sin embargo un cálculo directo muestra que (la clase de)  $xg \otimes x$  genera (sobre  $k$ )  $H^2(\Omega H)$ . Un cálculo menos directo muestra que  $H^\bullet(\Omega H)$  es un anillo de polinomios en una variable, con generador en grado dos dado por este elemento. Incluimos a continuación la verificación de este hecho, que se deduce de los tres siguientes items

- $H \cong H^*$  como álgebras de Hopf, basta tomar los elementos de  $H^*$  definidos por

$$\hat{g} : \begin{cases} 1 & \mapsto 1 \\ g & \mapsto -1 \\ x & \mapsto 0 \\ xg & \mapsto 0 \end{cases} \quad \hat{x} : \begin{cases} 1 & \mapsto 0 \\ g & \mapsto 0 \\ x & \mapsto 1 \\ xg & \mapsto 1 \end{cases}$$

y se verifica  $\hat{g}^2 = \epsilon$ ,  $\hat{g}\hat{x} = -\hat{x}\hat{g}$ ,  $\hat{x}^2 = 0$ . Por esta razón tenemos el isomorfismo

$$H^\bullet(\Omega H) = \text{Ext}_{H^*}^\bullet(k, k) \cong \text{Ext}_H^\bullet(k, k)$$

<sup>1</sup>Consideraremos el caso  $2 \neq 0$  en  $k$ .

- A su vez,  $H = (k[x]/x^2) \# k\mathbb{Z}_2$ , lo que permite calcular el Ext con la fórmula

$$\text{Ext}_H^\bullet(k, k) = \text{Ext}_{k[x]/x^2}^\bullet(k, k)^{\mathbb{Z}_2}$$

(ver por ejemplo [Ste95]).

- $\text{Ext}_{k[x]/x^2}^\bullet(k, k)$  es un anillo de polinomios en una variable en grado uno, digamos que su generador es  $D$ , hay dos posibilidades: la acción del generador de  $\mathbb{Z}_2$  es trivial en  $D$ , o actúa por  $D \mapsto -D$ . En el primer caso valdría  $\text{Ext}_{k[x]/x^2}^\bullet(k, k)^{\mathbb{Z}_2} = k[D]$ , en el segundo en cambio sería  $\text{Ext}_{k[x]/x^2}^\bullet(k, k)^{\mathbb{Z}_2} = k[D^2]$ . Pero en  $H$  no hay elementos primitivos, por lo tanto  $H^1(\Omega H) = 0$  y con eso queda descartada la primera opción.

Una consecuencia de este cálculo es que el corchete de Gerstenhaber es trivial, pues es trivial en el generador (por razones de grado).

Por lo tanto, en cualquier  $H$ -módulo álgebra  $A$ , la aplicación dada por

$$\begin{aligned} A^{\otimes 2} &\rightarrow A \\ a \otimes b &\mapsto xg(a)x(b) \end{aligned}$$

es un 2-cociclo integrable.

Observemos que dar una estructura de  $H$ -módulo álgebra en un álgebra  $A$  es lo mismo que dar una  $\mathbb{Z}_2$ -graduación (dada por los autovalores  $\pm 1$  de  $g$ ) y una (super) derivación con respecto a esta graduación, pues la fórmula

$$h(ab) = h_1(a)h_2(b)$$

en este caso, para  $h = x$  dice (si  $a$  es homogéneo):

$$x(ab) = x(a)b + g(a)x(b) = x(a)b + (-1)^{|a|}ax(b)$$

De esta manera, cada (super) derivación  $x$  en  $A$  da lugar a un cociclo integrable distinguido en  $H^2(\Omega H)$ .

### 4.3. Comparación con otras estructuras

#### Algebras de cactus y de Baues

Finalmente, en esta sección enumeramos una lista de estructuras algebraicas que pueden ser definidas a partir de la coálgebra tensorial. La razón de hacerlo es, por un lado, la importancia de estas estructuras y su estrecha relación con  $s\mathcal{Cacti}$ , y también para prevenir de una posible confusión con la aparición de la estructura de biálgebra relacionada con  $s\mathcal{Cacti}$ , pues la misma puede aparecer pero con significados muy diferentes. Esta parte y sus definiciones no son utilizadas en ningún otro lado de la tesis, por lo que simplemente las enumeraremos y haremos las afirmaciones sin demostraciones. Una referencia en esta subsección es el trabajo [GJ94].

La noción de  $s\mathcal{Cacti}$ -álgebra es un caso particular de otras estructuras. Si  $(\bar{\Lambda}, d_\Lambda)$  es un espacio vectorial diferencial graduado y  $\Sigma^{-1}\bar{\Lambda}$  su desuspensión, hay una torre de estructuras algebraicas que pueden ser definidas con la ayuda de la coálgebra  $\bar{T}^c\Sigma^{-1}\bar{\Lambda}$ , es decir, como espacio vectorial es el álgebra tensorial (no unitaria), pero se considera  $\Delta$  la comultiplicación dada por deconcatenación.

En realidad, análogo a lo hecho antes para  $TV$ , se puede considerar una bigraduación considerando grado externo el tensorial, y grado interno el inducido por  $\bar{\Lambda}$  sin desuspender. Una coderivación de grado total uno, en caso de respetar el bigrado (en el sentido de la observación 4.1 y la definición 4.4) esta determinado unívocamente por dos aplicaciones (la primera homogénea de grado uno y la segunda de grado cero):

$$\begin{aligned} d_\Lambda & : \bar{\Lambda} \rightarrow \bar{\Lambda} \\ \mu_\Lambda := d_e & : \bar{\Lambda}^{\otimes 2} \rightarrow \bar{\Lambda} \end{aligned}$$

Ser de cuadrado cero en  $\bar{T}^c\Sigma^{-1}\bar{\Lambda}$  equivale a que  $d_\Lambda^2 = 0$ , que  $\mu_\Lambda$  sea un producto asociativo, y que  $d_\Lambda$  sea una derivación con respecto a ese producto, es decir, una d.g. álgebra asociativa.

Una manera equivalente de definir las  $A_\infty$ -álgebras es a través de una coderivación (de grado total uno, pero no necesariamente compatible con el grado)

$$D : \bar{T}^c\Sigma^{-1}\bar{\Lambda} \rightarrow \bar{T}^c\Sigma^{-1}\bar{\Lambda}$$

A partir de la propiedad universal de la coálgebra cotensorial, dar una tal  $D$  es equivalente a dar una transformación lineal

$$\pi \circ D : \overline{T}^c \Sigma^{-1} \overline{\Lambda} \rightarrow \Sigma^{-1} \overline{\Lambda}$$

o equivalentemente, una familia de aplicaciones

$$m_n : \overline{\Lambda}^{\otimes n} \rightarrow \overline{\Lambda}$$

(donde en general se denota  $m_1 = d_\Lambda$ ,  $m_2 = \mu_\Lambda$ ). Las ecuaciones que deben verificar las  $m_n$  para tratarse de un álgebra asociativa a menos de homotopía se codifican, en términos de  $D$  por una única ecuación:  $D^2 = 0$ .

Una estructura de  $B_\infty$ -álgebra<sup>2</sup> en  $\overline{\Lambda}$  es, por definición, dotar a la coálgebra cotensorial diferencial  $(\overline{T}^c \Sigma^{-1} \overline{\Lambda}, D)$  de un producto que la convierta en una biálgebra diferencial. Es decir, una aplicación

$$\overline{T}^c \Sigma^{-1} \overline{\Lambda} \otimes \overline{T}^c \Sigma^{-1} \overline{\Lambda} \rightarrow \overline{T}^c \Sigma^{-1} \overline{\Lambda}$$

que debe ser asociativa, debe conmutar con  $D$  en el sentido que  $D$  debe ser no sólo coderivación de la deconcatenación sino también una derivación de este producto, y además el producto debe ser morfismo de coálgebras. Esta última condición, dada la propiedad universal de la coálgebra  $\overline{T}^c \Sigma^{-1} \overline{\Lambda}$  dice que la multiplicación está determinada por la proyección en  $\Sigma^{-1} \overline{\Lambda}$ , es decir, está determinada por una aplicación

$$\overline{T}^c \Sigma^{-1} \overline{\Lambda} \otimes \overline{T}^c \Sigma^{-1} \overline{\Lambda} \rightarrow \Sigma^{-1} \overline{\Lambda}$$

lo que provee, junto con  $D$ , una familia de operaciones

$$\begin{aligned} m_n & : \overline{\Lambda}^{\otimes n} \rightarrow \overline{\Lambda} \\ M_{n,m} & : \overline{\Lambda}^{\otimes n} \otimes \overline{\Lambda}^{\otimes m} \rightarrow \overline{\Lambda} \end{aligned}$$

sujetas a ciertas ecuaciones (parte de las cuales corresponden a que las  $m_n$  den lugar a una estructura de álgebra asociativa a menos de homotopía). Esta estructura tiene su origen en el trabajo de Baues [Bau81].

Una manera equivalente de definir una *sCacti*-álgebra es a partir de una  $B_\infty$  álgebra donde se pide que  $m_n = 0$  para  $n > 2$ , y  $M_{n,m} = 0$  si  $n \neq 1$  (en

<sup>2</sup>La notación  $B_\infty$  se presta a confusión ya que no es una noción a menos de homotopía de una estructura  $B$ , en el sentido del capítulo 1.

particular, el producto  $m_2$  es asociativo estricto). La correspondencia es tomar simplemente  $m_1$  como el diferencial,  $m_2$  el producto  $C_2$ , y  $M_{1,m} = B_{m+1}$ .

En otras palabras, una estructura de  $s\mathcal{Cacti}$  álgebra en  $\Lambda$  es un tipo particular de estructura de biálgebra en  $(\overline{T}^c \Sigma^{-1} \Lambda, D)$ . Este diccionario puede prestarse a confusión con el teorema 4.10, donde mostramos que las estructuras de biálgebra en  $H$  están en correspondencia con las estructuras de  $s\mathcal{Cacti}$  álgebra en  $\overline{T} \overline{H}$  (que extienden la de álgebra asociativa y son) compatibles con el grado.

## Aplicación a la construcción cobar de una coálgebra

En este apartado buscamos explicar de qué manera los resultados de este capítulo se relacionan con los obtenidos por Kadeishvili [Kad05], Menichi [Men04] y (recientemente) Young [You13].

A partir de una coálgebra (d.g)  $C$  se puede obtener un álgebra asociativa (d.g.) vía la construcción cobar  $\Omega C = \overline{T} \overline{C}$  donde el producto asociativo está dado por el tensorial y el diferencial se construye a partir del diferencial (interno) y la comultiplicación de  $C$  (que da lugar al que llamamos externo).

En los mencionados trabajos se estudia el siguiente hecho. Al poseer  $C$  además una estructura de biálgebra, se tiene en  $\Omega C$  una estructura de  $\mathcal{Cacti}$  álgebra. El aporte del presente trabajo es no sólo dar de manera explícita esta estructura (en contraposición a [Kad05, Men04]) y una demostración completa de este hecho, sino también dar con la propiedad que permite el recíproco: la compatibilidad con el grado (ver definición 4.4).

De esta manera, se consigue (junto con el lema 4.12) que el funtor cobar

$$\text{Biálgebras} \xrightarrow{\Omega} \mathcal{Cacti}\text{-álgebras}$$

es una equivalencia de categorías al restringirlo a las álgebras compatibles con el grado que son libres como álgebra asociativa. Por lo tanto, si  $H$  y  $H'$  son biálgebras tales que  $\Omega H \simeq \Omega H'$ , se tiene que  $H \simeq H'$  y no sólo quasi-isomorfias como se desprende de los resultados anteriores [Men04, Kad05, You13].

Recordamos que Kadeishvili observa que, dado que  $H$  biálgebra d.g. implica  $\Omega(H)$  es un álgebra de cactus (que en particular es un álgebra de Baues) y se tiene que  $B(\Omega(H))$  es biálgebra d.g. Sin embargo, no responde si el quasi-isomorfismo clásico  $B(\Omega(H)) \rightarrow H$  es o no de biálgebras. Esta pregunta es

tomada por Young, y respondida afirmativamente (con una leve modificación de la construcción  $\Omega$  por cierta  $\tilde{\Omega}$ ). Con el resultado de Young se puede concluir que si  $H$  y  $H'$  son biálgebras tales que  $B(\Omega(H))$  es quasi-isomorfa a  $B(\Omega(H'))$  entonces  $H$  es equivalente débil a  $H'$ . Pero si  $B(\Omega(H))$  es isomorfa a  $B(\Omega(H'))$  entonces solo se puede concluir que  $H$  y  $H'$  son equivalentes débiles, y no isomorfas como se puede concluir de los resultados de esta tesis.

Por último vale mencionar que el resultado obtenido es (levemente) más fuerte que el recíproco de la afirmación

$$H \text{ biálgebra} \implies \Omega H \text{ Cacti (compatible con el grado)}$$

ya que el teorema 4.10 dice que si  $V$  es un espacio vectorial (d.g.) y  $\overline{TV}$  es una *Cacti* compatible con el grado entonces  $V = \overline{H}$  el ideal de aumentación de una biálgebra  $H$ .

Por último, vale mencionar que la noción de  $H$ -módulo álgebra (ni su correspondencia con morfismos de  $\Omega H$  en el complejo de Hochschild de dicha álgebra) son tratados en los trabajos mencionados.

# Apéndice A

## Teorías de campos

Presentamos aquí un resumen de Teorías de Campos desde un punto de vista matemático. El objetivo es introducir el operad de Cactus topológico como una estructura relacionada con teorías de campos conformes (en dimensión  $D = 2$ ). Comenzamos por exponer brevemente la axiomatización de teoría de campos de Segal [Seg04] y Atiyah [Ati89] como punto de partida para luego estudiar más específicamente de teorías conformes (sección A).

En primer lugar se presenta una axiomatización de una teoría clásica de campos. Luego se pasa a estudiar la axiomatización de una teoría cuántica. Por último, se estudian teorías conformes. La intención es motivar la definición de estas teorías en teorías cuánticas generales y éstas, a su vez, en teorías clásicas vía la integral de caminos. De esta manera, una teoría cuántica de campos resulta una representación lineal de una categoría de cobordismo. Así, una teoría conforme resulta un funtor con una categoría de partida particular: la categoría de superficies de Riemann. Cabe destacar que, históricamente, éstas teorías fueron las primeras en axiomatizarse así (en [Seg04]) y luego las topológicas (en [Ati89]).

El autor quisiera resaltar que el presente apéndice busca, principalmente, ilustrar su motivación personal en el estudio del operad *Cacti*. El mismo se presenta aquí como las cadenas singulares del operad topológico. Éste, a su vez, puede verse como superficies de Riemann infinitesimales. Se sugiere así que estudiar representaciones del operad *Cacti* es, en cierto modo, estudiar Teorías Topológicas Conformes a género cero.

De esta manera, el material aquí tratado no es *necesario* para el estudio del capítulo 2. Por eso se ha permitido un lenguaje no estrictamente preciso y una exposición no agotada de los tópicos aquí tratados.

## Teoría clásica - formulación Lagrangiana

Comenzaremos por introducir el concepto de *teoría clásica*. En ella el sistema físico se describe por una variedad  $M$  de dimensión  $D$  ( $= d+1$ , una dimensión temporal y el resto espacial), unos campos de interés del problema y un funcional, la acción  $S$  en el espacio de los campos a considerar.

Más detalladamente, se tienen unos *campos*  $\varphi$  que serán cantidades *física-mente relevantes*. Típicamente los  $\varphi$  serán secciones a algún fibrado  $E \rightarrow M$ . Llamemos  $\mathcal{F}$  al conjunto de campos (o sea, de secciones de  $E$  que nos interesen).

La formulación lagrangiana presupone la existencia de una *densidad*  $L : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L(\varphi, \partial_\mu \varphi, x)$  y se define, de la siguiente manera la *acción*:

$$S(\varphi) = \int_M dV(x) L(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x), x)$$

El principio físico que define el comportamiento del sistema es el siguiente: “La solución del sistema está dada por un punto crítico de la acción”. Más explícitamente,  $\varphi$  es un punto crítico si al considerar un campo  $\psi$  arbitrario, se tiene

$$\left. \frac{dS(\varphi + h\psi)}{dh} \right|_{h=0} = 0.$$

La condición sobre el campo obtenida de esta manera se llama ecuación de Euler-Lagrange o “ecuación de movimiento”. En caso de ser  $M = \mathbb{R}^D$  (el espacio plano), corresponden a:

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

**Ejemplo:** En el caso de una partícula de masa  $m$ , consideremos  $M = [a, b]$ , el tiempo.  $E = M \times \mathbb{R}^3$  el fibrado trivial y los campos, trayectorias:

$$q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Supongamos que la partícula está sometida a un potencial  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos entonces:

$$S(q) = \int_a^b dt \frac{m}{2} (q')^2 - V(q(t))$$

Como  $\partial_{q'}(L) = mq'$ , la ecuación de movimiento resulta la (segunda) ley de Newton:

$$mq'' = -\nabla V$$

## Ingredientes de una teoría clásica

Ahora, en el caso de querer describir un sistema con una cierta condición de contorno, la variación de la acción debe hacerse sobre los campos que cumplen dicha condición. Supongamos que queremos, a modo de ejemplo, calcular la evolución de un campo dada una condición inicial a un tiempo  $t_0$ . Esto corresponde a fijar el valor de dicho campo en una subvariedad  $Y_0$  de  $M$  de codimensión 1. Al preguntar el valor del campo en un tiempo final  $t_1$ , estamos restringiendo ese campo en una subvariedad, también de codimensión 1,  $Y_1$ . Llamemos  $X$  a la porción de  $M$  comprendida entre  $Y_0$  e  $Y_1$ . En los ejemplos vistos (y en general) los campos están dados de manera razonable en función de los espacio-tiempos.

Podemos entonces, más allá de las cuestiones técnicas del cálculo de la solución a una teoría clásica, identificar, siguiendo [Fre92a], [Fre92b] los ingredientes más importantes involucrados. Fijemos primero  $d \in \mathbb{N}$ , la dimensión de los espacios de la teoría. Así, los espacio-tiempos tendrán dimensión  $D = d + 1$  y se llamarán  $X$ . En general las de dimensión  $d$  se llamarán  $Y$ .

### Definición A.1.

Consideraremos que tenemos dado, para cada variedad  $X$  de dimensión  $d + 1$  el conjunto  $\mathcal{F}_X$  de campos en  $X$ . Asimismo, consideraremos dada, para el caso en que  $\partial X \neq \emptyset$ , el conjunto de “campos en el borde”  $\mathcal{F}_{\partial X}$ . Estos campos podrían ser restricciones o gérmenes o cualquier otra cosa (por ejemplo en el caso de cuerdas). Además, tendremos una aplicación restricción  $\partial : \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_{\partial X}$ . También consideraremos dada la acción clásica  $S_X : \mathcal{F}_X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se piden los siguientes axiomas:

1. Invarianza de los campos y la acción ante isomorfismos (del tipo que se quiera<sup>1</sup>).  
Es decir, si  $X \xrightarrow{\cong} X'$ , una isometría, isomorfismo conforme, difeomorfismo, homeomorfismo, según corresponda, se tendrá  $\mathcal{F}_X \simeq \mathcal{F}_{X'}$  y  $S_X = S_{X'}$ .
2. Al considerar  $-X$  (la orientación opuesta en  $X$ ), debe ser  $\mathcal{F}_{-X} = \mathcal{F}_X$  y  $S_{-X} = -S_X$ . Esto se debe, en los ejemplos, al cambio en el signo de la forma de volumen y la preservación del resto de los componentes en el cálculo de la acción.
3. Si  $X = X_1 \sqcup X_2$ , entonces  $\mathcal{F}_X \simeq \mathcal{F}_{X_1} \times \mathcal{F}_{X_2}$  y la acción es aditiva.

---

<sup>1</sup>En el contexto físico, la mínima invarianza razonable es la métrica ya que corresponde a la percepción desde distintos sistemas de referencia del fenómeno descrito.

4. Axioma de pegado: Si  $Y \hookrightarrow X$  es una subvariedad (inmersa) de codimensión 1 disjunta con  $\partial X$ , sea  $\hat{X}$  la variedad que se obtiene de cortar por  $Y$  (ahora  $\partial\hat{X} = \partial X \sqcup Y \sqcup -Y$ ). El siguiente diagrama debe ser un egalizador:

$$\mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_{\hat{X}} \rightrightarrows \mathcal{F}_Y$$

Y la acción debe dar lo mismo. Aquí es dónde se ve claro que las restricciones al borde pueden necesitar retener más información, por ej, el germen de la función diferenciable y no sólo su valor.

## Teoría cuántica *à la* Feynman e integral de caminos

Supongamos que existe una medida en los espacios  $\mathcal{F}_X$  y  $\mathcal{F}_{\partial X}$ . Esta suposición debe ser entendida como punto de partida para la heurística de la definición siguiente y no una hipótesis formal a verificar de manera estricta en la una teoría cuántica. La formulación por *integral de caminos* de la teoría cuántica de campos postula que la probabilidad de obtener un cierto campo  $\varphi_0 \in \mathcal{F}_{\partial X}$  está dada por<sup>2</sup>:

$$\int_{\partial\phi=\varphi_0} \mathcal{D}\phi e^{-S(\phi)}$$

En este caso, la integral sobre “todos los campos tales que su restricción al borde es  $\varphi_0$ ” lo pensamos como una integral sobre “todos los campos” pesado con una delta en  $\varphi_0$ . Un poco más en general, no se tiene un estado *puro*  $\varphi_0$  sino una función  $f(\varphi)$ . Es decir, consideramos como espacio de estados:

$$\mathcal{H}_{\partial X} = L^2(\mathcal{F}_{\partial X})$$

Y postulamos que la probabilidad de tener la distribución de campos  $f$  está dada por:

$$\int_{\mathcal{F}_{\partial X}} \mathcal{D}\phi f(\partial\phi) e^{-S(\phi)}$$

Donde la primera aproximación correspondería a  $f(\varphi) = \delta_{\varphi_0}$ .

(Si no, podríamos considerar alguna clase de funciones suaves y en el dual tendríamos la delta, pero no nos interesa detenernos en esto ahora.)

<sup>2</sup>Tácitamente, nos restringimos a teorías euclídeas. En el caso de teorías lorentzianas, debe ser  $e^{iS(\phi)}$ . Asimismo, omitimos el factor  $\hbar^{-1}$  en dicho exponente.

Tenemos entonces, en el caso de  $X$  una variedad con borde, definido:

$$Z_X : \mathcal{H}_{\partial X} \rightarrow \mathbb{C}$$

## Función de partición

### Definición A.2.

Para una variedad cerrada  $X$ , definimos la *función de partición* como:

$$Z_X = \int_{\mathcal{F}_X} \mathcal{D}\phi e^{-S(\phi)}$$

## Operador evolución

Denotaremos un cobordismo  $X$  entre  $Y_0$  e  $Y_1$  por  $Y_0 \xrightarrow{X} Y_1$ .

Entonces, para un cobordismo  $Y_0 \xrightarrow{X} Y_1$ , consideraremos *source* y *target* aplicaciones de restricción al borde:

$$s : \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_{Y_0}, t : \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_{Y_1}$$

Siguiendo,  $U_X : \mathcal{H}_{Y_0} \rightarrow \mathcal{H}_{Y_1}$ , definido como el operador que cumple, para  $f \in \mathcal{H}_{Y_0}, g \in \mathcal{H}_{Y_1}$ :

$$\langle g, U_X(f) \rangle_{\mathcal{H}_{Y_1}} = \int_{\phi \in \mathcal{F}_X} \mathcal{D}\phi g(t(\phi)) f(s(\phi)) e^{-S(\phi)}$$

**Definición A.3.** Una teoría de dimensión  $D = d+1$  consiste en dar un funtor monoidal desde *una* categoría de cobordismo a una categoría de espacios de estados (por ej, espacios vectoriales o de Hilbert).

## Categorías de cobordismos

Para codificar la simetría de la teoría, debemos especificar la categoría de cobordismos de partida. Siempre se considerarán como objetos las variedades cerradas (compactas y sin borde) orientables de dimensión fija  $d$ . Además, suponemos que vienen con un *collaring* (ver 4.6 en Hirsch [Hir94], o sea un cilindro pequeño de la variedad. Si  $Y_0, Y_1$  son dos objetos, los morfismos son los cobordismos entre variedades, es decir variedades de dimensión  $D = d+1$ , tales que  $\partial X = -Y_0 \sqcup Y_1$  donde  $-Y_0$  denota la variedad  $Y_0$  con la orientación opuesta en el *collaring*. Toda variedad de dimensión  $D$  tiene un *collaring* que “apunta para afuera” (ver [Hir94]), con esa información se pegan cobordismos y así se define la composición. Se puede ver que la variedad resultante no

depende del collaring.

Volviendo a la cuestión de la simetría, en cada caso, definiremos una categoría distinta dependiendo de la estructura en las variedades de dimensión  $d$  que quisiéramos considerar. Es decir, se considera el mismo morfismo a dos cobordismos que son difeomorfos, isométricos, conformemente equivalentes, etc. A continuación, unos ejemplos.

- simetría topológica [Ati89]: No se agrega más estructura en los objetos y se consideran cobordismos equivalentes a los dados por variedades difeomorfas.
- Ídem antes, pero sólo considerar variedades de dimensión  $D$  orientables.
- simetría conforme [Seg04]: Considerar variedades con estructura métrica, a menos de isomorfismo conforme. En el caso de dimensión 2, esto es equivalente a dar una estructura compleja en la superficie y estudiarlas a menos de isomorfismo analítico.
- Métrica: Como antes, pero a menos de isometría.
- Teorías embebidas: Cualquiera de las anteriores, pero se toma un espacio ambiente  $W$  y se consideran todas las variedades y cobordismos embebidos en  $W$ .

## Teorías de campos conformes

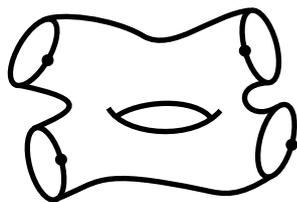
En esta sección se presentan teorías de campos conformes. Se buscó dar un enfoque englobador de las distintas fuentes: [Seg04, Kac98, Hua98, Sch08]. Más precisamente, se toma como punto de partida la definición de Segal (definición A.5) de Teoría de Campos Conforme: un funtor con valores en espacios vectoriales que a una superficie de Riemann le asigna un operador. A partir de la definición de Segal, se estudia qué información determina una teoría. Si se fija una superficie *pantalón* (una esfera a la que se le quitan tres discos abiertos), toda superficie de Riemann puede descomponerse en cilindros y pantalones. A continuación, se restringe el estudio a las superficies de género cero, desde una óptica operádica. Se presenta el operad de Cactus (topológico) como una suerte de límite de superficies de género cero, o superficies *infinitesimales*. Por último, se presentan muy brevemente las teorías topológicas de campos conformes (TCFTs). Las mismas consisten en pasar, aplicando el funtor de cadenas singulares, de la categoría original (enriquecida en espacios topológicos) a una categoría enriquecida en complejos de cadenas.

Notación:  $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z|_e = 1\}$  y  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ . La parametrización estándar será la identidad de  $\mathbb{S}^1$ . La pensaremos recorriendo la circunferencia en sentido antihorario y comenzando en 1 (lo cual distingue a este punto y le da una orientación a la variedad).

**Definición A.4.** Llamaremos  $\mathcal{RS}$  a la categoría de superficies de Riemann (superficies compactas con una estructura compleja). Es decir, la categoría con objetos  $\mathbb{N}_0$  pensado un número  $n$  como  $C_n$  el espacio dado por la unión disjunta (ordenada)  $n$  círculos, es decir  $C_n = \coprod_n (\mathbb{S}^1)$  y cuyas flechas

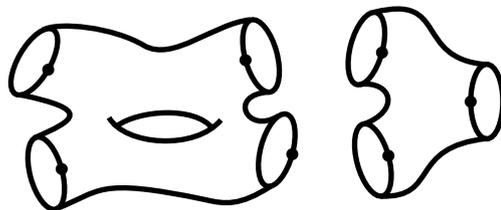
$$C_n \xrightarrow{X} C_m$$

consisten en las superficies de Riemann  $X$  con los bordes parametrizados analíticamente<sup>3</sup>  $\coprod_n (\mathbb{S}^1) \sqcup \coprod_m (\mathbb{S}^1) \rightarrow \partial X$  de manera tal que en los primeros  $n$ , los *entrantes*, la orientación inducida por  $X$  y la parametrización correspondiente no coinciden, y en los otros  $m$ , los *salientes*, sí. Una superficie con dos círculos entrantes y dos salientes, de género uno:



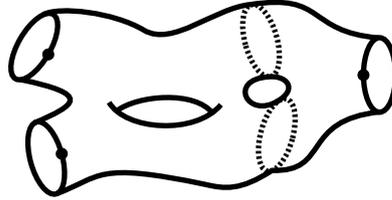
Si se tiene  $C_n \xrightarrow{X} C_m \xrightarrow{Y} C_l$ , la composición  $Y \circ X$  está dada por el pegado de las superficies a través de las parametrizaciones  $\partial X \leftarrow C_m \rightarrow \partial Y$ . Observemos que el dato de las parametrizaciones es fundamental para poder pegar las superficies identificando con la ayuda de las mismas y de esta manera no tener ambigüedad en la definición.

Veamos un ejemplo. Al componer las siguientes superficies  $C_2 \xrightarrow{X} C_2 \xrightarrow{X'} C_1$ :



<sup>3</sup>En el trabajo de Segal no se pide que las parametrizaciones sean analíticas, pero luego en la literatura se suele incluir esta hipótesis ya que permite el pegado de la estructura compleja de las superficies.

se obtiene  $C_2 \xrightarrow{X' \circ X} C_1$ :



- La categoría así definida no tiene identidades. Obviamente, se pueden agregar identidades formales. Geométricamente se puede pensar que la identidad es el círculo  $\mathbb{S}^1$  como un cilindro de altura nula. Esto es, se piensa la identidad como el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{S}^1 \times [0, \epsilon]$$

Volveremos a esto más adelante al definir los anillos estándares.

- Iremos aún más allá al agregar todas las parametrizaciones analíticas como flechas de  $C_1$  en  $C_1$ . Notaremos por  $\mathcal{Dif}$  al grupo de difeomorfismos analíticos (que preservan la orientación). Pensaremos las parametrizaciones de  $\mathbb{S}^1$  como cilindros de altura nula.
- Se tiene en esta categoría una operación (parcial) en las flechas que denotaremos  $X \mapsto \check{X}_i^j$  definida cuando  $X$  tiene al menos un círculo entrante y uno saliente. Se obtiene a partir de  $X$  pegando el  $i$ -ésimo círculo entrante y el  $j$ -ésimo saliente.
- La unión disjunta da una estructura monoidal en  $\mathcal{RS}$ :  $C_n \sqcup C_m = C_{n+m}$ .

A continuación definiremos una teoría de campos conforme como un caso particular de la definición general A.3. Es decir, una CFT será un funtor  $\mathcal{RS} \xrightarrow{U} \mathcal{Hilb}$  donde  $\mathcal{Hilb}$  denota la categoría de espacios de Hilbert (y operadores acotados). Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert, notaremos por  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  a los operadores unitarios y  $\mathcal{C}(\mathcal{H})$  a las contracciones, es decir a los operadores lineales  $A$  tales  $\|Av\| \leq \|v\|$ .

**Definición A.5.** (primera versión de la definición)

Una teoría de campos conforme (en dimensión 2) consiste en un funtor  $U : \mathcal{RS} \rightarrow \mathcal{Hilb}$  tal que:

- monoidal:  $U(C_n \sqcup C_m) = U(C_n) \otimes U(C_m)$ .  
Luego, si llamamos  $\mathcal{H} = U(C_1)$ , se tiene  $U(C_n) = \mathcal{H}^{\otimes n}$ , y  $U(C_0) = \mathbb{C}$
- traza: Todos los elementos  $U(X) \in \mathcal{H}^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}^{*\otimes m}$  son de *tipo traza*:  
Si  $e_k$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ , para  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$  se tiene  

$$\sum_k \langle U(X)(v_1, \dots, v_{i-1}, e_k, v_{i+1}, \dots, v_n, w_1, \dots, w_{j-1}, e_k, w_{j+1}, \dots, w_m) \rangle < \infty$$
para  $v's, w's \in \mathcal{H}$  cualesquiera. Luego, se tiene definido el operador  $\text{tr}_{i,j}$

Observemos que como componer es tomar traza entre las coordenadas correspondientes a los círculos que se identifican, se tiene la propiedad:

$$U(\check{X}_i^j) = \text{tr}_{i,j}(U(X))$$

## El semigrupo $\mathfrak{C}$

**Definición A.6.** Sea  $\mathfrak{C} \subset \text{Hom}_{\mathcal{RS}}(C_1, C_1)$  el semigrupo dado por los cilindros. Es decir, flechas de la forma  $A(a, b) = \{z \in \mathbb{C} : a \leq |z| \leq b\}$  para  $a < b \in \mathbb{R}$  con parametrizaciones de sus bordes.

**Ejemplos:** A modo de ejemplo, y para fijar notación, distinguiremos algunos elementos en  $\mathfrak{C}$ :

- Para  $q \in \mathbb{C}_{<1}^\times$ , sea  $A_q = \{z \in \mathbb{C} : |q| \leq |z| \leq 1\}$  con la parametrización estándar del círculo unitario (que resulta saliente) y con la parametrización estándar comenzando en  $q$  en el círculo entrante ( $\theta \mapsto qe^{i\theta}$ ).
- Sea  $\mathcal{E}_0 := \{f : \mathbb{D} \hookrightarrow \mathring{\mathbb{D}} \text{ holomorfa} : f(0) = 0\}$ .  
Podemos pensar  $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathfrak{C}$  vía:

$$f \mapsto A_f := \mathbb{D} \setminus \text{Im } f$$

con la parametrización estándar en el círculo unitario y la inducida por la  $f$  en el círculo entrante.

Si consideramos  $q = f'(0)$ , tenemos  $f = qg$  donde:

$$g(z) = z + \sum_{k>0} a_k z^{k+1}$$

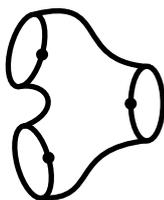
Al reemplazar  $z^k$  por  $e^{ik\theta}$  para los  $z$  de módulo 1, tenemos la parametrización del borde entrante. Así,  $A_f = A_q \circ g$ .

## Puntos importantes acerca de teorías conformes

Antes de proseguir, enunciaremos los puntos más importantes acerca de teorías conformes.

En una teoría de campos conforme el valor de una teoría en el semigrupo  $\mathfrak{C}$  de cilindros queda definida por su espacio de estados (como representación del álgebra de Virasoro A.23).

Por otra parte, una teoría conforme está determinada por su valor en las superficies de género cero. Esto quiere decir que el valor de la teoría en una superficie de género  $g > 0$  se puede calcular a partir de los valores de la teoría en las superficies de género cero. Esto se debe a que cualquier superficie de Riemann se consigue pegando cilindros y pantalones, donde la superficie *pantalón* es:



Más precisamente, se elige un pantalón: una superficie  $Y$  de género cero, dos círculos entrantes y uno saliente. Considerando la superficie con la estructura opuesta,  $\mathcal{A}$ , se tiene que cualquier superficie de Riemann se puede construir pegando  $Y$ ,  $\mathcal{A}$  y cilindros  $A_q$ .

Obviamente, esto no quiere decir que cualquier elección de  $Y$  dé lugar a una teoría conforme. Más aún, datos coherentes a género cero no garantizan que a género superior se tenga una teoría conforme. El problema de determinar cuándo el género cero da lugar a una teoría completa ha sido estudiado en [MS89, Zhu96].

Por otra parte, es posible restringirse sólo a superficies con un sólo círculo saliente. Es decir, el valor de la teoría en cualquier superficie es calculable a partir de las superficies con una sola salida. Esto implica que las teorías pueden estudiarse como álgebras sobre el operad  $\mathcal{S}$  (que definimos a continuación) en vez de representaciones de la categoría de cobordismo  $\mathcal{RS}$ .

## Teorías conformes en lenguaje operádico

A continuación, describiremos las teorías conformes de manera operádica. Más adelante definiremos el óperad de Cactus topológico y, de esta manera, buscaremos relacionar el estudio de teorías conformes con el del operad *Cacti*.

**Definición A.7.** Considerando sólo superficies de Riemann con un sólo círculo saliente se tiene el operad (topológico) de Segal,  $\mathcal{S}$  dado por:

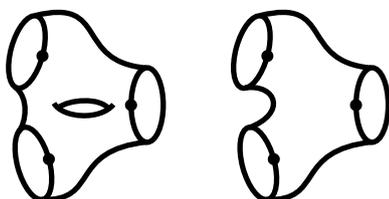
$$\mathcal{S}(n) = \mathcal{RS}(n, 1)$$

con composición definida por

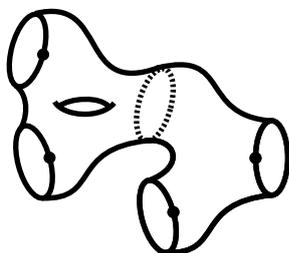
$$Y \circ_i^{\mathcal{S}} X = Y \circ^{\mathcal{RS}} (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \sqcup \cdots \sqcup \overbrace{X}^i \sqcup \mathbb{S}^1 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{S}^1)$$

Es decir, la composición parcial  $i$ -ésima consiste en pegar en la entrada  $i$ -ésima las superficies involucradas.

En otras palabras, para dos superficies de Riemann en  $\mathcal{S}$ , la composición parcial  $Y \circ_i X$  del operad está dada por pegar el círculo saliente de  $X$  al  $i$ -ésimo círculo entrante de  $Y$ . Por ejemplo, si  $X$  y  $X'$  son las superficies:



Entonces  $X' \circ_1 X$  resulta:



**Observación A.8.** La composición parcial respeta género. Es decir:

$$g(Y \circ_i X) = g(X) + g(Y)$$

**Definición A.9.** Debido a esto, se tiene el suboperad  $\mathcal{S}_0$  formado por las superficies de género cero.

**Definición A.10.** Se define el operad de *Pequeños Discos Enmarcados*  $f\mathcal{D}$  como el suboperad (cf. [Hua98, 6.4] de  $\mathcal{S}_0$  dado por:

$$f\mathcal{D}(n) = \left\{ (z_1, \dots, z_n, q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{C}^{2n} \text{ tales que } \begin{cases} B_{|q_i|}(z_i) \subset \mathbb{D} & \forall i \\ B_{|q_i|}(z_i) \cap B_{|q_j|}(z_j) = \emptyset & \forall i \neq j \end{cases} \right\}$$

Donde  $B_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$  y recordemos que  $\mathbb{D} = B_1(0)$  es el círculo unitario. La superficie de Riemann dada unos parámetros  $z_i, q_i$  de esta forma es:

$$X(z_i, q_i) = \mathbb{D} \setminus \bigcup_i B_{|q_i|}(z_i)$$

Donde las parametrizaciones son estándares comenzando en  $q_i$  para el  $i$ -ésimo círculo entrante y en 1 para el saliente. Esto es  $t \mapsto z_i + qe^{2\pi t}$  y  $t \mapsto e^{2\pi t}$  respectivamente.

**Observación A.11.** El semigrupo  $\mathbb{C}_{<1}^\times$  es un suboperad de  $f\mathcal{D}$  vía  $q \mapsto A_q$ .

Dada una CFT, se tiene entonces, considerando  $f\mathcal{D}$ , una teoría a género cero. Por el argumento del apartado A dos teorías coinciden si lo hacen en  $f\mathcal{D}$  y  $\mathfrak{C}$  (equivalentemente la representación del álgebra  $\mathfrak{vir}$  o el conjunto de sus campos primarios).

## Operad de cactus topológico

A continuación definiremos un cactus topológico y posteriormente la estructura operádica en el espacio de los cactus. El operad de Cactus topológico se debe a Voronov [Vor05]. El mismo puede pensarse como una versión infinitesimal del operad  $\mathcal{S}$  como explicaremos más adelante.

**Definición A.12.** Un cactus *topológico* de  $n$  lóbulos ( $n \in \mathbb{N}$ ) consiste en la siguiente colección de datos

- $n$  copias de  $\mathbb{S}^1$  como espacio topológico punteado (distinguiendo  $1 \in \mathbb{S}^1$ ) que llamaremos los *lóbulos* del cactus, numerados de 1 a  $n$ . Al punto distinguido lo llamaremos el *punto base* del lóbulo y lo notaremos  $\bullet_i$ . Cada lóbulo, tendrá una longitud  $r_i > 0$ . Llamaremos la *longitud total* del cactus a  $R = \sum r_i$ .

- Un punto  $\{\bullet\}$ , la *raíz* del cactus y para cada lóbulo  $i$ , un conjunto finito  $P_i \subset \mathbb{S}^1$  (posiblemente vacío) de puntos en el  $i$ -ésimo lóbulo tal que  $1 \notin P_i$ . Llamemos  $P$  al conjunto de todos estos puntos, es decir,  $P = \{\bullet\} \cup \bigcup_i P_i$ .
- Una asignación suyectiva  $p : \{\bullet_1, \dots, \bullet_n\} \rightarrow P$  tal que  $p(\bullet_i) \notin P_i$  que indicará dónde se pega cada lóbulo. Más aún, si se determina  $a < \bullet_i$  para todo  $a \in P_i$  y  $\bullet_i < p(\bullet_i)$  esto debe ser un orden en el conjunto  $P \sqcup \{\bullet_1, \dots, \bullet_n\}$  (y la raíz resulta el mínimo).
- Un orden lineal en  $p^{-1}(x)$  para cada  $x \in P$ .
- Para cada lóbulo  $i$  un punto distinguido, la *espinas*,  $e_i \in \mathbb{S}^1$ .

Un cactus se dirá *sin espinas* si en todo lóbulo la espina coincide con el punto distinguido de cada lóbulo. Es decir,  $\xi_i = 1 \in \mathbb{S}^1 \forall i$ .

**Observación A.13.** Un cactus se puede representar gráficamente de la siguiente manera.

- i. Por cada lóbulo  $i$  se dibuja en el plano una curva simple de longitud  $r_i$ .
- ii. En cada curva se marcan su punto base, los puntos  $P_i$  y la espina  $e_i$ .
- iii. Se pega el punto base del  $i$ -ésimo lóbulo al punto  $p(i)$ .
- iv. En el caso de que más de un punto base se pegue al mismo punto  $x$  en el  $k$ -ésimo lóbulo, se utiliza el orden lineal en  $p^{-1}(x)$  de manera tal que si se recorre la curva  $k$ -ésima en sentido antihorario al llegar a  $x$  se encuentran los lóbulos pegados en el orden dado.

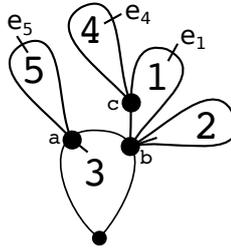
Por convención, siempre dibujaremos un cactus con la raíz abajo y en el caso de que varios lóbulos se peguen en la raíz, el orden en los mismos como de derecha a izquierda. La condición de que  $<$  definido por la función de pegado  $p$  sea un orden nos dice que el espacio formado por las curvas y sus interiores es contráctil.

**Ejemplo:** El siguiente dibujo representa al cactus de 5 lóbulos dado por

$$P_1 = \{c\}, \quad P_2 = P_4 = P_5 = \emptyset, \quad P_3 = \{a, b\}$$

$$p(1) = p(2) = b, \quad p(3) = \bullet, \quad p(4) = c, \quad p(5) = a$$

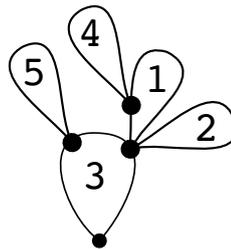
el orden lineal en  $\rho^{-1}(b)$  es  $2 < 1$  y las espinas  $e_1, e_2 = 1, e_3 = a, e_4, e_5$ .



Notar que la asignación  $p$  determina arcos en cada lóbulo, cada uno con su longitud. Si olvidamos estas longitudes, obtenemos lo que hemos denominado un esquema de un cactus (ver definición 2.5).

De manera gráfica, el esquema se puede recuperar de la representación gráfica de un cactus topológico como el dibujo donde sólo importa cuántos puntos hay sobre cada lóbulo y cómo éstos se pegan según la asignación  $p$ .

El esquema del cactus antes dibujado es:



Llamemos  $\mathcal{E}sq(n)$  al conjunto de todos los esquemas de cactus de  $n$  lóbulos. El esquema de un cactus está determinado entonces por  $n$ ,  $k_i = \#P_i$ ,  $p$  y el orden lineal en cada  $p^{-1}(\bullet_j)$  y  $p^{-1}(\bullet)$ . Es decir, la cantidad de lóbulos, puntos en cada lóbulo y la indicación de dónde se pega cada lóbulo.

Un cactus  $X_n$  de  $n$ -lóbulos está determinado entonces por:

- Su esquema  $c \in \mathcal{E}sq(n)$ .
- La longitud de sus lóbulos  $r_i \in \mathbb{R}_{>0}$  (para  $i = 1, \dots, n$ ).
- La posición de las espinas  $e_i \in \mathbb{S}^1$ .
- La longitud de todos los arcos.

Más precisamente, dado que la cantidad de arcos determinados en el  $i$ -ésimo lóbulo es  $k_i + 2$ , llamemos  $x_0^i, \dots, x_{k_i+1}^i$  a dichas longitudes.

Es claro que  $\sum_t x_t^i = r_i$ . Si  $a_t^i := x_t^i/r_i$ , se tiene  $\sum_t a_t^i = 1$ . En otras palabras, el vector  $\bar{a}^i$  pertenece al  $k_i$  símplice estándar,  $\Delta^{k_i}$  con  $a_j^i > 0 \forall j$ .

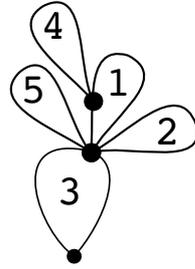
Geométricamente, el hecho de asignar valor nulo a los arcos se interpreta como que los puntos que lo determinan coinciden. Supongamos que se  $a_j^i = 0$ , es decir, el  $j$ - esimo arco del  $i$ - esimo lóbulo tiene longitud nula. En este caso, en el dibujo  $j + 1$  y  $j + 2$  coincidirían.

Sea  $c$  un esquema de  $n$  lóbulos. Construimos  $c_j^i$  el esquema de  $n$  lóbulos dado por:

$$k'_s = \begin{cases} k_s & \text{si } s \neq i \\ k_s - 1 & \text{si } s = i \end{cases}$$

$$\rho'(s) = \begin{cases} \rho(s) & \text{si } s \neq i \text{   } \rho(s) \leq j + 1 \\ \rho(s - 1) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además, el orden lineal en  $\rho'^{-1}(j + 1) = \rho^{-1}(j + 1) \sqcup \rho^{-1}(j + 2)$  es justamente el inducido por esta unión disjunta. En otras palabras, el esquema  $c'$  se construye a partir de  $c$  eliminando el  $j + 2$ - esimo punto en del  $i$ - esimo lóbulo y juntando la información de los puntos  $j + 1$  y  $j + 2$ . Por ejemplo, al eliminar del esquema representado antes el segundo arco del tercer lóbulo se obtiene:



Entonces, un cactus  $X$  de esquema  $c$  tal que  $a_j^i = 0$  es equivalente al cactus  $X'$  de esquema  $c_j^i$ , mismos parámetros  $r_i$  y longitudes de arcos:

$$a_t^s = \begin{cases} a_t^s & \text{si } s \neq i \text{   } t < j \\ a_{t+1}^s & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, el cactus  $X'$  tiene los mismos arcos originales salvo el  $j$ - esimo del  $i$ - esimo lóbulo que se eliminó.

En la siguiente definición notaremos a esta relación de equivalencia por  $\sim$ . Observemos además que, esta relación está basada en la identificación del símplice  $\Delta^{k_i-1}$  como  $j$ - esima cara del símplice  $\Delta^{k_i}$ .

**Definición A.14.** El operad de *Cactus Topológico* se define como:

$\mathcal{TopCa}(n)$  es el espacio topológico de todos los cactus de  $n$ -lóbulos. Por la observación anterior, este conjunto puede presentarse como:

$$\mathcal{TopCa}(n) = \left( \coprod_{c \in \mathcal{C}(n)} \prod_{i=1}^n (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^1 \times \Delta^{k_i}) \right) / \sim$$

y así se define su topología.

Para  $n, m \in \mathbb{N}, i \in 1, \dots, n$ , definiremos la  $i$ -ésima composición

$$\mathcal{TopCa}(n) = \circ_i : \mathcal{TopCa}(n) \times \mathcal{TopCa}(m) \rightarrow \mathcal{TopCa}(n + m - 1)$$

vía el pegado de cactus que definiremos a continuación.

Dados los cactus  $X_n \in \mathcal{TopCa}(n)$  y  $X_m \in \mathcal{TopCa}(m)$ , el cactus  $X_n \circ_i X_m \in \mathcal{TopCa}(n + m - 1)$  se define de la siguiente manera.

Se reparametriza el  $i$ -ésimo círculo de  $X_n$  vía  $t \mapsto R_{X_m} t$  (y de esta manera se consigue que tenga la longitud del cactus  $X_m$ ). Luego se identifica el círculo exterior de  $X_m$  con el interior de  $i$ -ésimo de  $X_n$  conservando la orientación y de manera tal que la raíz de  $X_m$  coincida con la espina. De esta manera el  $i$ -ésimo círculo de  $X_n$  es reemplazado por el cactus  $X_m$ . Para finalizar, se etiquetan los círculos del cactus resultante utilizando  $\{1, \dots, i - 1\}$  para los círculos provenientes de  $X_n$  con etiqueta menor a  $i$ ; por otra parte,  $\{i, \dots, i + m - 1\}$  para los círculos  $\{1, \dots, m\}$  provenientes de  $X_m$ ; y por último  $\{i + m, \dots, m + n\}$  para los provenientes de  $X_n$  con etiqueta original  $\{i + 1, \dots, n\}$ .

Definimos también  $u\mathcal{TopCa}$  como el suboperad dado por

$$u\mathcal{TopCa}(n) = \{X \in \mathcal{TopCa}(n) \mid \forall i : r_i = 1\}$$

Notar que  $u\mathcal{TopCa}(n) \hookrightarrow \mathcal{TopCa}(n)$  es un retracts dado por deformar los parámetros  $r_i$  a 1.

Los cactus sin espinas forman un suboperad que notaremos  $s\mathcal{TopCa}$ . Por último, también tenemos

$$su\mathcal{TopCa} = s\mathcal{TopCa} \cap u\mathcal{TopCa}$$

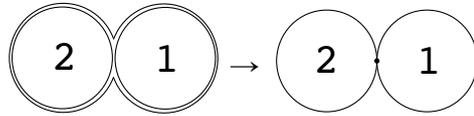
**Observación A.15.** Notemos que al considerar el grupo multiplicativo  $\mathbb{S}^1$  se tiene

$$\mathbb{S}^1 = u\mathcal{TopCa}(1) \subset \mathcal{TopCa}(1)$$

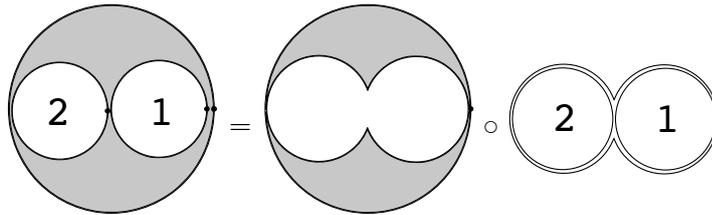
Esto es análogo a  $\mathfrak{C} \subset \mathcal{RS}(1, 1)$ . Más aún, recordemos que nos permitíamos considerar cilindros  $A_q$  no sólo para  $q \in \mathbb{C}_{<1}^\times$  sino también para  $q$  de módulo unitario. Es decir, en la inclusión (de semigrupos)

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}_{\leq 1}^\times$$

pensamos a los elementos de  $\mathbb{S}^1$  como cilindros de altura cero. Extendiendo esta analogía, podemos pensar a los cactus límites de superficies en  $\mathcal{S}_0$ . Por ejemplo, un cactus de dos lóbulos se puede pensar como límite de una superficie pantalón:



Viendo el siguiente ejemplo,



podemos pensar que el cactus  $\textcircled{2} \textcircled{1}$  codifica la interacción instantánea de una teoría, es decir el paso infinitesimal de dos círculos de entrada a uno. Está fuera del estudio de esta tesis encontrar las condiciones en las que se puede tomar límite y calcular el valor que una teoría dada induce en los cactus. Más bien esto resulta una motivación para estudiar el dicho operad.

Para finalizar la sección incluimos un breve apartado sobre teorías topológicas conformes. La presentación de este tema no busca ser profunda en las sutilezas ni exhaustiva en los detalles. Sencillamente, la intención es presentar, valiéndonos de la observación anterior, al operad *Cacti* como una versión combinatoria y simplificada del operad  $\mathcal{S}_0$ .

## Teorías topológicas conformes

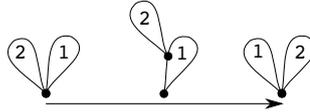
En el capítulo 2, se estudia el operad *Cacti* pero desde una perspectiva completamente algebraica. Buscamos en aquí presentarlo como un modelo simplificado de teorías topológicas conformes (a género cero). Para esto,

pensaremos a los operads  $\mathcal{Cact}$  y  $\mathcal{Cacti}$  de la siguiente manera

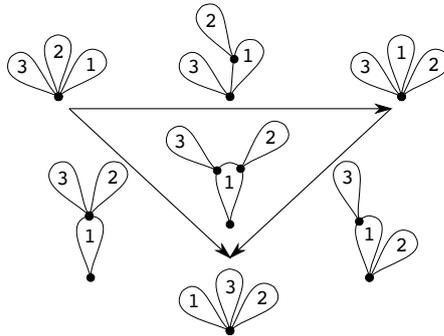
$$\begin{aligned}\mathcal{Cact}(n) &= \mathcal{C}_*^{\text{simpl}}(u\mathcal{TopCa}(n)) \\ \mathcal{Cacti}(n) &= \mathcal{C}_*^{\text{simpl}}(su\mathcal{TopCa}(n))\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{C}_*^{\text{simpl}}$  denota el funtor de cadenas celulares. En relación a esto, notemos que a partir de la definición A.14 se obtiene una descripción celular del espacio  $su\mathcal{TopCa}(n)$  donde las celdas se indexan por los esquemas de cactus.

Por ejemplo, un 1-símplice está dado por:



Un 2-símplice es, por ejemplo:



Lo que buscamos ilustrar entonces es la geometría de los espacios  $su\mathcal{TopCa}(n)$  es capturada por los complejos de cadenas  $\mathcal{Cacti}(n)$  (ya que corresponden a su complejo de cadenas celulares) cuya descripción algebraica y combinatoria hemos dado en el capítulo 2. De esta manera, el operad  $\mathcal{Cacti}$  es una linealización del operad topológico  $su\mathcal{TopCa}$ . Esto es análogo a lo que ocurre en teorías topológicas conformes, que definimos a continuación.

Una teoría topológica conforme o TCFT es una teoría topológica proveniente de una teoría conforme [Get94, Kon95]. El proceso busca formalizar las ideas de Witten [Wit88]. Intentaremos introducir brevemente el concepto. Notemos como  $\mathcal{C}_*^{\text{sing}}$  al funtor de espacios topológicos en complejos de cadenas dado por las cadenas singulares. Aplicando este funtor a los espacios  $\mathcal{RS}(m, n)$  se

obtiene una categoría con los mismos objetos de antes ( $\mathbb{N}_0$ ) enriquecida en complejos de cadenas. Es decir,

$$\overline{\mathcal{RS}}(m, n) := \mathcal{C}_*^{\text{sing}}(\mathcal{RS}(m, n))$$

**Definición A.16.** Una TCFT [Cos07] es un funtor como en la definición A.5 pero con categoría de partida  $\overline{\mathcal{RS}}(m, n)$ .

Si nuevamente nos restringimos a superficies de género nulo y un sólo círculo saliente, se tiene un un  $dg$ -operad  $\overline{\mathcal{S}}_0$ .

Uno podría aplicar las mismas ideas al operad  $\mathcal{TopCa}$  y obtener un  $dg$ -operad. Ahora bien, como

$$u\mathcal{TopCa}(n) \hookrightarrow \mathcal{TopCa}(n)$$

es un retracto, se tiene que

$$\mathcal{C}_*^{\text{sing}}(u\mathcal{TopCa}(n)) \hookrightarrow \mathcal{C}_*^{\text{sing}}(\mathcal{TopCa}(n))$$

es una equivalencia débil.

Por otra parte, para el espacio  $u\mathcal{TopCa}(n)$  se tiene un modelo simplicial dado por la presentación de la definición A.14. Por lo tanto, al considerar sólo cadenas celulares, se tiene que

$$\mathcal{Cact}(n) = \mathcal{C}_*^{\text{simpl}}(u\mathcal{TopCa}(n)) \hookrightarrow \mathcal{C}_*^{\text{sing}}(u\mathcal{TopCa}(n))$$

es también un cuasi-isomorfismo (de complejos de cadenas).

En cierta manera, a modo de motivación, se puede pensar entonces que el  $dg$ -operad  $\mathcal{Cact}$  es una versión simplificada y combinatoria de  $\overline{\mathcal{S}}_0$  (esto se debe a que se tiene un modelo celular de  $u\mathcal{TopCa}$ ). En esa línea de pensamiento,  $\mathcal{Cact}$ -álgebras (representaciones del operad  $\mathcal{Cact}$ ) serían un modelo *de juguete* de TCFT a género 0 (representaciones del operad  $\overline{\mathcal{S}}_0$ ).

## A.1. Más detalles sobre teorías conformes

En esta sección se exponen detalles técnicos correspondientes a teorías conformes. Se incluyen aquí para completar en cierta manera la presentación e ilustrar la particularidad de dichas teorías. Se puede pensar, entonces, esta sección como un apéndice del apéndice.

### La anomalía conforme

Una simetría en la teoría clásica consiste en una operación que deja invariante las ecuaciones de movimiento. Claramente, toda operación que deja invariante la acción clásica es una simetría (clásica) de la teoría (ver apéndice). Pero a veces ocurre que la “medida” en el espacio de todos los campos no es invariante y esto introduce una *anomalía* en la teoría cuántica.

Es razonable pensar que una simetría clásica no siempre se traslada a la teoría cuántica, basta contemplar la fórmula:

$$\int_{\phi \in \mathcal{F}_X} \mathcal{D}\phi e^{-S(\phi)}$$

La validez de dicha simetría en la teoría cuántica requerirá una condición sobre la “medida”  $\mathcal{D}\phi$ . Cuando esto no ocurre, se llama una *anomalía* de la teoría cuántica.

El caso que nos interesa es la llamada anomalía conforme. A modo de ejemplo, supongamos que  $S$  es la acción de Polyakov (ver apéndice para más detalle y notación).

$$S(X, g) = \int \sqrt{-\det(h)} h^{a,b} g_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$$

En este caso, para un cambio conforme en la métrica  $h' = e^{2f} h$ , la acción se mantiene invariante,  $S(X, h') = S(X, h)$ , es decir, la teoría clásica es conforme. Pero supongamos que la medida no lo hace. Los *cuerdistas* intuyen que cambia controladamente ver [Pol98] cap. 1 y 3) por un factor:

$$(\mathcal{D}\phi)' = e^{icS_L(f)} \mathcal{D}\phi$$

donde  $c \in \mathbb{C}$  es una constante (de la teoría) y  $S_L(f)$  es la llamada acción de Liouville<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> $S_L(f) = \int_X dV_g (\partial_\mu f \partial^\mu f + Rf)$

En el caso de la teoría conforme, por razones históricas de teoría de cuerdas, se supone que esta falla está controlada. Más precisamente, la clase conforme de una superficie  $X$  define el operador  $U(X)$  a menos de múltiplo escalar de módulo unitario. O sea, estamos en el caso de una representación proyectiva de la categoría  $\mathcal{RS}$ . Equivalentemente, una representación lineal de una extensión central de  $\mathcal{RS}$ .

**Definición A.17.** Una extensión de  $\mathcal{RS}$  consiste en una categoría  $\widetilde{\mathcal{RS}}$  cuyos objetos son los mismos y para cada morfismo, se da una asignación:

$$X \mapsto L_X \simeq \mathbb{C}$$

Es decir, a cada superficie de Riemann le asignamos un espacio vectorial complejo de dimensión 1. Se tiene además, para cada par de morfismos componibles, una multiplicación:

$$L_X \otimes L_Y \xrightarrow{m_{XY}} L_{X \circ Y}$$

con las propiedades de asociatividad inducidas por las de  $\mathcal{RS}$ . Se definen los morfismos de  $\widetilde{\mathcal{RS}}$  como pares  $(X, \xi)$  donde  $\xi \in L_X$ . Y se define la composición  $(X, \xi) \circ (Y, \zeta) = (X \circ Y, m_{XY}(\xi \otimes \zeta))$ .

Segal muestra que la extensión es esencialmente única, siendo toda extensión isomorfa a:

$$X \mapsto L_X = \text{Det}_X^{\otimes cL} \otimes \text{Det}_X^{*\otimes cR}$$

donde  $\text{Det}_X$  admite dos descripciones equivalentes:

$$\text{Det}_X = \begin{cases} \Lambda^{\text{top}}(\Omega^{0,1}(X)) \\ \text{Det}(\bar{\partial} : \Omega^{0,0}(X) \rightarrow \Omega^{0,1}(X)) \end{cases}$$

La segunda descripción se basa en la construcción dada por Quillen en [Qui85] y se encuentra desarrollada en [Seg04, Hua98]. Nos conformaremos con citar aquí algunas de sus propiedades:

**Proposición A.18.**

- $L_X = L_{\tilde{X}}$  cuando  $\tilde{X}$  se obtiene a partir de  $X$  revirtiendo la parametrización de algunos círculos de su borde.
- $L_{-X} = L_X^*$  (recordemos que  $-X$  es la superficie con la orientación opuesta y con todas las parametrizaciones de sus círculos revertidas).

- Se tiene un isomorfismo canónico  $L_X \simeq L_{\tilde{X}}$ .
- Se tiene un elemento canónico  $\xi_A \in L_A$  cuando  $A$  es un cilindro.

Podemos ahora dar una versión final de la definición A.5:

**Definición A.19.**

Una teoría de campos conforme consiste en un funtor monoidal proyectivo  $\mathcal{RS} \xrightarrow{U} \mathcal{Hilb}$ , tal que  $U(X)$  es de tipo traza para toda  $X$  superficie de Riemann, o equivalentemente, un funtor monoidal (de tipo traza):

$$U : \widetilde{\mathcal{RS}}^{(c_L, c_R)} \rightarrow \mathcal{Hilb}$$

Donde  $\mathcal{RS}^{(c_L, c_R)}$  es la extensión de la categoría para algún par de valores  $c_L, c_R \in \mathbb{C}$ . No entraremos en detalle sobre esta construcción ya que no la precisaremos en el resto de la monografía. Un desarrollo más profundo del tema puede verse en el manuscrito original de Segal [Seg04] (que basa la construcción a la vez en [Qui85]) o en [Hua98]. Las constantes  $c_L$  y  $c_R$  se llamarán la carga *izquierda* y *derecha* de la teoría. En el caso  $c_L = c_R =: c$  se llamará la *carga central*.

Más adelante volveremos sobre el hecho de considerar representaciones proyectivas. Puntualmente, lo haremos al considerar el álgebra de Virasoro (en vez de sólo el álgebra de Witt).

## Cuantización radial

La cuantización radial es, sencillamente, interpretar coordenada temporal a la coordenada radial en un cilindro  $A(a, b) = \{z \in \mathbb{C} : a \leq |z| \leq b\}$ .

Llamemos

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{>0} &= \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\} \\ \mathbb{C}_{\geq 0} &= \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\} \\ \mathbb{D} &= \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \\ \mathbb{D}^\times &= \mathbb{D} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}_{\geq 0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{D}^\times \end{array}$$

donde las flechas horizontales son las inclusiones y las verticales corresponden al revestimiento  $\tau \mapsto e^{2\pi i\tau}$ . Es usual utilizar la notación  $q = e^{2\pi i\tau}$ , es decir, se supone esta relación entre  $q$  y  $\tau$  sin mayor aclaración.

**Observación A.20.** Al interpretar el eje imaginario en  $\mathbb{C}_{>0}$  como el tiempo, el disco  $\mathbb{D}$  hereda una interpretación de *tiempo* donde  $0 \in \mathbb{D}$  corresponde al pasado infinito.

## El álgebra de Virasoro

Recordemos que  $\mathcal{D}if = \text{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$  es el grupo de difeomorfismos analíticos del círculo. Como todo grupo de difeomorfismos, su álgebra de Lie está dada por los campos vectoriales (analíticos en este caso). Es decir,  $\text{Lie}(\mathcal{D}if) = \text{Vect}(\mathbb{S}^1)$ . Recordemos que

$$\text{Vect}(\mathbb{S}^1) = \overline{\langle \cos(n\theta) \frac{d}{d\theta}, \sin(n\theta) \frac{d}{d\theta} : n \in \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{R}}}$$

**Definición A.21.** Al complexificar el álgebra, obtenemos la llamada álgebra de Witt:  $\mathfrak{witt} = \overline{\langle L_n : n \in \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{C}}}$  donde  $L_n = -ie^{-in\theta} \frac{d}{d\theta}$ . Se tiene

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m}.$$

**Observación A.22.** Dada una teoría de campos conforme  $U$ , restringiéndola a  $\mathcal{D}if$  se tiene una representación proyectiva  $\mathcal{D}if \xrightarrow{\rho} \mathbb{P}(\mathcal{U}(H))$ . Luego, se tiene una representación proyectiva  $\mathfrak{witt} \xrightarrow{d\rho} \text{End}(H)$ , lo que es equivalente a una representación lineal de alguna extensión central de  $\mathfrak{witt}$ .

**Definición A.23.** El álgebra de Virasoro es la única extensión central (no trivial, salvo isomorfismos,) posible del álgebra de Witt (ver [Sch08], capítulo 5). Está dada por  $\mathfrak{vir} = \mathfrak{witt} \oplus \langle C \rangle_{\mathbb{C}}$  donde  $C$  es central y vale:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{(n^3 - n)}{12} C \delta_{m+n}$$

**Definición A.24.** Una representación  $\mathfrak{vir} \rightarrow \text{End}(H)$  se dirá unitaria si cumple:

$$\langle L_n v, w \rangle = \langle v, L_{-n} w \rangle \forall v, w \in H$$

Es decir, el  $L_n^\dagger = L_{-n}$  donde estamos llamando de la misma manera a  $L_n \in \mathfrak{vir}$  y a su imagen en la representación.

La denominación de “unitaria” se debe a que esta condición es equivalente a que los generadores del álgebra  $\text{Vect}(\mathbb{S}^1)$  actúen como operadores antisimétricos en  $H$ . Así, si la representación proviene de una de  $\mathcal{D}if$  ésta debe ser unitaria.

**Definición A.25.** Una representación  $V$  de  $\mathfrak{vir}$  se dirá de peso máximo para  $c, h \in \mathbb{C}$  si existe un  $\psi \in V$  tal que:

- $V = \langle \psi \rangle_{\mathfrak{vir}}$
- $C\psi = c\psi$
- $L_0\psi = h\psi$
- $L_n\psi = 0, \forall n > 0$

En el caso  $h \geq 0$  se llama una representación de energía positiva. Esto se debe a que  $L_0$  (que debe ser autoadjunto en una representación unitaria) se corresponde (en el marco de la cuantización radial) a la derivada temporal y, por lo tanto, sus autovalores se interpretan como la energía. Por este motivo, se supone además que al diagonalizarlo se obtiene un espectro (los valores medibles) acotado inferiormente y por consiguiente se puede suponer positivo.

**Observación A.26.** Si  $\psi$  es autovector de  $L_0$  con autovalor  $h$ , entonces vale lo siguiente:

- $L_n\psi$  es autovector de  $L_0$  con autovalor  $h - n$ .
- Más en general,  $L_{n_1} \cdots L_{n_k}\psi$  lo es con autovalor  $h - \sum n_i$ .

Esto último da una graduación en el espacio vectorial  $V$  y es la razón por la cual a  $\psi$  se lo llama de peso máximo. Si notamos que  $V = \langle \psi \rangle_{\mathfrak{vir}}$  y  $L_n\psi = 0 \forall n > 0$  se tiene

$$V = \overline{\langle L_{n_1} \cdots L_{n_k}\psi : n_i < 0 \rangle}$$

**Definición A.27.** Una representación de peso máximo  $M(c, h)$  se llama un *módulo de Verma* si el conjunto  $\{L_{n_1} \cdots L_{n_k}\psi : k \geq 0, 0 > n_1 \geq \cdots n_k\}$  es una base de  $M$  como espacio vectorial.

Siempre existe un módulo de Verma para  $c, h \in \mathbb{C}$  cualesquiera, basta tomar  $\mathfrak{U}(\mathfrak{vir}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{vir}_+)} \mathcal{C}_{c,h}$ , donde  $\mathfrak{U}$  denota el álgebra envolvente,  $\mathfrak{vir}_+$  es la subálgebra generada por los  $L_n$  con  $n > 0$ ,  $L_0$  y  $C$ , y  $\mathcal{C}_{c,h} = \mathbb{C}$  como espacio vectorial, con acción trivial de los  $L_n$ , donde  $L_0$  actúa multiplicando por  $h$  y  $C$  por  $c$ .

Para cualquier representación  $V$  de peso máximo  $(c, h)$  se tiene un epimorfismo  $M(c, h) \twoheadrightarrow V$ .

**Teorema A.28.** ([Sch08] Teorema 6.8 y 6.13)

Sea  $M = M(c, h)$ ,  $v \in M$  vector de peso máximo. Entonces existe una única forma hermítica  $\langle, \rangle$  en  $M$  tal que:

- $\langle v, v \rangle = 1$
- La representación es unitaria. En particular, como  $L_0$  es autoadjunto, sus autoespacios serán ortogonales.
- $\text{Ker}(\langle, \rangle)$  es el submódulo propio maximal.

En el caso de que la forma  $\langle, \rangle$  resulte semidefinida positiva debe ser  $c, h \geq 0$ . Más aún, si  $c \geq 1, h \geq 0$  resulta así y es definida positiva para  $c > 1, h > 0$ .

**Definición A.29.** (y corolario)

Para el caso en que la forma  $\langle, \rangle$  sea semidefinida positiva, se tiene una representación unitaria en

$$W(c, h) := M(c, h) / \text{Ker}(\langle, \rangle)$$

que resulta de peso máximo. Una representación así es única salvo isomorfismo.

### Indescomponibles e irreducibles

Recordemos que un módulo se dice *irreducible* si no tiene submódulos propios no triviales. Por otra parte, un módulo se dice *indescomponible* si no se puede obtener como suma directa de dos submódulos propios.

Sólo nos limitaremos a mencionar los siguientes resultados.

**Teorema A.30.** ([Sch08, 6.17]).

- $M(c, h)$  es indescomponible.
- $W(c, h)$  es irreducible.

Dada una CFT se tiene una representación proyectiva  $\mathcal{D}if \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{U}(H))$ . Esto induce una representación unitaria de  $\mathfrak{vir}$  en  $H$ . Esta representación se descompondrá en una suma directa de  $W(c, h)$  (con el mismo  $c$ ). Se puede plantear el problema inverso. Es decir, si al considerar una cierta representación  $V = \bigoplus_i W(c, h_i)$ , ésta se puede integrar a una representación de  $\mathcal{D}if$  como primer paso para definir una CFT. El siguiente teorema [GW85] nos garantiza eso.

**Teorema A.31.** [Sch08, 6.18], [GW85] Sea  $\mathcal{H} = \overline{W(c, h)}$ . Entonces se tiene una representación proyectiva  $\mathcal{D}if \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{U}(H))$ .

## Representaciones de energía positiva

Consideremos el siguiente teorema ([HN93, 9.13]):

**Teorema A.32.** Sea  $\mathbb{R} \xrightarrow{\rho} \mathcal{U}(\mathcal{H})$  una representación unitaria dada por  $t \mapsto e^{itA}$  tal que  $A$  (que debe ser auto-adjunto) es positivo<sup>5</sup>. Entonces  $\rho$  se puede extender de manera única:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{U}(\mathcal{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}_{\geq 0} & \xrightarrow{\hat{\rho}} & \mathcal{C}(\mathcal{H}) \end{array}$$

Donde  $\hat{\rho}$  cumple:

1. Es una representación fuertemente continua, es decir continua con respecto a la topología fuerte en  $\mathcal{C}(\mathcal{H})$
2. Es holomorfa en  $\mathbb{C}_{>0}$ . Es decir,  $\forall u, v \in \mathcal{H}, \langle u, \rho v \rangle: \mathbb{C}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa.
3. Es de reflexión positiva, es decir,  $\hat{\rho}(z)^\dagger = \hat{\rho}(-\bar{z})$

Observar que, dada una representación  $\hat{\rho}$  así, se recupera de manera única  $\rho$  (y  $A$ ).

La representación  $\hat{\rho}$  está dada por:

$$\hat{\rho}(\tau) = e^{i\tau A}$$

El hecho de que cumple con lo pedido puede verse en [HN93].

---

<sup>5</sup>en [HN93] se enuncia para un  $A$  negativo.

**Observación A.33.** En otras palabras, si la representación  $\mathbb{R} \xrightarrow{L_0} \mathcal{U}(\mathcal{H})$  del teorema anterior viene dada como:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) \\ e^{2\pi it} &\mapsto e^{2\pi it L_0} \end{aligned}$$

con  $L_0$  autoadjunto y positivo, se tiene una representación inducida:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H}) \\ q = e^{2\pi i\tau} &\mapsto q^{L_0} = e^{2\pi i\tau L_0} \end{aligned}$$

La representación  $q \mapsto q^{L_0}$  tiene las siguientes propiedades:

- Es una representación fuertemente continua (en  $\mathbb{D}$ ).
- Es holomorfa en  $\mathbb{D}^\circ$ .
- Es de reflexión positiva, es decir,  $(q^{L_0})^\dagger = \bar{q}^{L_0}$

**Observación A.34.** Supongamos ahora que tenemos una representación proyectiva de reflexión positiva del semigrupo  $\mathfrak{C} \rightarrow \mathcal{C}(H)$ . Esto es, para  $A \in \mathfrak{C}$ , si denotamos por  $\bar{A}$  al anillo con la orientación (y parametrizaciones) opuesta(s), vale

$$U_{\bar{A}} = U_A^\dagger$$

Es decir, si  $A$  está dado por

$$A = g_f^{-1} \circ A_q \circ g_i$$

con  $q \in \mathbb{D}^\times$ ,  $g_i, g_f \in \mathcal{D}if$ , al ser

$$\bar{A} = g_i^{-1} \circ A_{\bar{q}} \circ g_f$$

resulta

$$U_{\bar{A}} = U^{-1}(g_i) U_{\bar{q}} U(g_f)$$

Por otra parte:

$$U_A^\dagger = U^\dagger(g_i) U_q^\dagger (U^{-1}(g_f))^\dagger$$

Entonces, la condición de reflexión positiva es precisamente:

$$U^\dagger(g_i) U_q^\dagger (U^{-1}(g_f))^\dagger = U^{-1}(g_i) U_{\bar{q}} U(g_f)$$

Ahora, para  $A = A_q$  (es decir,  $g_i, g_f$  triviales), se tiene:

$$U_q^\dagger = U_{\bar{q}}$$

O sea, la representación del subgrupo  $\mathbb{D}^\times$  en  $\mathcal{C}(\mathcal{H})$  es de reflexión positiva. Por otra parte, suponiendo que la representación de  $\mathfrak{C}$  es continua, considerando  $g_f$  trivial y al hacer  $q \rightarrow 1$ , se tiene:

$$U^{-1}(g_i) = U^\dagger(g_i)$$

O sea, la representación del subgrupo  $\mathcal{D}if$  es unitaria.

En vistas de esto y del teorema A.31 y la observación A.33 se tiene el siguiente

**Corolario A.35.** *Hay una correspondencia uno a uno entre las representaciones proyectivas de  $\mathfrak{C}$  en  $\mathcal{C}(\mathcal{H})$  y las representaciones unitarias del álgebra de Virasoro  $\mathfrak{vir} \rightarrow \text{End}(\mathcal{H})$ .*

Dicho en otras palabras, la representación del álgebra de Virasoro determina la teoría en los cilindros. Dado que toda superficie puede descomponerse en cilindros y pantalones, una teoría queda determinada por su valor en ellos. En la siguiente sección estudiamos cómo la representación  $\mathfrak{vir} \rightarrow \text{End}(\mathcal{H})$  se puede estudiar a partir de vectores de peso máximo o *campos primarios*. Además, de qué manera a partir de un campo primario  $\Psi$  se puede definir un operador en  $\mathcal{H}$ . En pocas palabras esto se consigue evaluando una de las entradas de una superficie pantalón en  $\Psi$ . Si bien esta sección no es determinante para el resto del capítulo, se decidió incluirla ya que se considera que un resumen de teorías conformes, por más breve que sea, se encuentra incompleto sin mencionar campos primarios. Para más detalles sobre el tema ver [DFMS97].

## Campos primarios

**Aclaración:** A partir de este momento, consideraremos una teoría conforme  $U : \mathcal{RS} \rightarrow \mathcal{Hilb}$  holomorfa, esto quiere decir que la dependencia de  $U$  en  $X$  es holomorfa como función de los parámetros modulares. Es decir, si se tiene una superficie  $X$ , se la descompone en cilindros  $A_{q_i}$  y pantalones, entonces la teoría debe ser holomorfa en los parámetros  $q_i$ .

A lo largo de este apartado,  $U$  denotará una teoría conforme y  $\mathcal{H} = U(C_1)$  su espacio de estados.

**Definición A.36.** [Seg04] Un  $\Psi \in \mathcal{H}$  se dice campo primario si existe un  $h \in \mathbb{C}$  tal que para toda  $f \in \mathcal{E}_0$  se tiene:

$$U_f \Psi = (f'(0))^h \Psi$$

donde, recordemos,  $U_f = U(A_f)$ .

Para desempacar la definición, recordemos que  $A_f \in \mathfrak{C}$  está dado por un par  $q = f'(0) \in \mathbb{D}^\times, g \in \mathcal{D}if$  vía  $A_f = A_q \circ g$ . Sabiendo que:

$$U_q = q^{L_0}$$

$$U(g) = e^{\sum_{n>0} a_n L_n}$$

se tiene que condición de la definición equivale a:

$$q^{L_0} e^{\sum_{n>0} a_n L_n} \Psi = q^h \Psi \quad \forall q \in \mathbb{D}^\times, g \in \mathcal{D}if$$

Poniendo  $g = id$  se tiene que  $L_0 \Psi = h \Psi$  (y como  $L_0$  es positivo,  $h \geq 0$ ). Al variar sobre toda  $g \in \mathcal{D}if$  se tiene  $L_n \Psi = 0 \quad \forall n > 0$ . Es decir, un campo primario es lo mismo que un vector de peso máximo.

**Ejemplo:** Consideremos  $\Omega$  el *vector vacío* de la teoría:  $\Omega = U(\mathbb{D})$ . Observemos que  $A_f \circ \mathbb{D} = \mathbb{D}$ , por lo tanto:

$$A_f \Omega = \Omega$$

O sea,  $\Omega$  es un campo primario con  $h = 0$ .

**Definición A.37.** Dado  $\Psi \in \mathcal{H}$  un campo primario con  $h \in \mathbb{N}_0$ ,  $C_n \xrightarrow{X} C_m$  una superficie de Riemann, se define una forma en  $X$  con valores en  $\mathcal{H}^{*\otimes n} \otimes \mathcal{H}^{\otimes m}$  de la siguiente manera:

Sea  $z \in X$  y  $\mathbb{D} \xrightarrow{\phi} X$  una carta tal que  $\phi(0) = z$ . Consideramos  $C_{n+1} \xrightarrow{\hat{X}_\phi} C_m$  dado por:

$$\hat{X}_\phi := X \setminus \text{Im}(\phi)$$

cuya parametrización del círculo nuevo está dada por la  $\phi$  del mismo modo que en la construcción de  $A_f$ . Es más, se puede pensar como una generalización de aquella construcción: al tomar  $X = \mathbb{D}, z = 0, \phi = f$  se tiene  $\hat{X}_\phi = A_f$ . Ahora definimos

$$\Psi_X(z) dz^h := U(\hat{X}_\phi)(\dots, \Psi)$$

Es decir, al recortar  $\text{Im}(\phi)$  de la superficie  $X$  se agrega un nuevo círculo. La variable correspondiente a este círculo se evalúa en  $\Psi$  y así se obtiene un

operador  $U_{(X,\phi)} : C_n \rightarrow C_m$ . De esta manera queda definida una forma: si se tiene otra carta en  $z$  dada por  $\mathbb{D} \xrightarrow{\tilde{\phi}} X, \phi(0) = z$ , suponiendo  $\text{Im}(\tilde{\phi}) \subset \text{Im}(\phi)$  vale

$$f := \phi^{-1}\tilde{\phi} \in \mathcal{E}_0$$

Observemos entonces que

$$\hat{X}_{\tilde{\phi}} = \hat{X}_{\phi} \circ A_f$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Psi_X(z) d\tilde{z}^h &= U(\hat{X}_{\tilde{\phi}})(\dots, \Psi) d\tilde{z}^h = U(\hat{X}_{\phi})(\dots, U_f \Psi) d\tilde{z}^h \\ &= U(\hat{X}_{\phi})(\dots, (f'(0))^h \Psi) d\tilde{z}^h = U(\hat{X}_{\phi})(\dots, \Psi) \underbrace{(f'(0)^h d\tilde{z}^h)}_{dz^h} \end{aligned}$$

En la definición de la forma  $\Psi_X$  se utiliza el hecho de que  $\Psi$  sea un campo primario para asegurar que  $U(g)\Psi = \Psi : \forall g \in \mathcal{D}if$ . Para campos que no sean primarios pero sí peso conforme definido (es decir, autovectores de  $L_0$ ) se puede proceder de manera análoga si se lograra utilizar parametrizaciones estándar. Apliquemos esta idea a la superficie con dos círculos entrantes y uno saliente.

$$\begin{aligned} P_{(z,r_0,r_1)} &:= \mathbb{D} \setminus (\{w \in \mathbb{C} : |w| < r_0\} \cup \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r_1\}) \\ &= A_{r_0} \setminus \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r_1\} \end{aligned}$$

con parametrizaciones estándar en todos los círculos.

Llamemos

$$U_{(z,r_0,r_1)} := U(P_{(z,r_0,r_1)})$$

**Definición A.38.** Sea  $V \subset \mathcal{H}$  definido de la siguiente manera. Para  $\{\Psi_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$  un conjunto linealmente independiente de campos primarios,  $V = \langle \{\Psi_i : i \in I\} \rangle_{\text{vir}}$ . Supondremos  $I$  finito. Se tiene:

- $\bar{V} = \mathcal{H}$
- $V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$  donde  $V_0 = \langle \{\Psi_i : i \in I\} \rangle_{\mathbb{C}}$ ,  $V_n = \langle \{L_{-n_1} \cdots L_{-n_k} \Psi_i : i \in I, \sum_j n_j = n\} \rangle_{\mathbb{C}}$ . Diremos  $|v| = n$  si  $v \in V_n$ .

- Si,  $v = L_{-n_1} \cdots L_{-n_k} \Psi_i$  y  $h_i$  es tal que  $L_0 \Psi_i = h_i \Psi_i$  entonces  $L_0 v = (h_i + |v|)$

Queremos ahora determinar la dependencia de  $U_{(z,r_0,r_1)}$  en  $z$ , es decir, para  $v_0, v_1 \in V$  y estudiaremos:

$$U_{(z,r_0,r_1)}(v_0, v_1)$$

Consideraremos que la primera variable corresponde al círculo centrado en 0 y la segunda al círculo centrado en  $z$ . Al variar los radios de los círculos por  $r'_0 < r_0$ ,  $r'_1 < r_1$  obtenemos:

$$P_{(z,r'_0,r'_1)} = P_{(z,r_0,r_1)} \circ \left( A_{r'_0/r_0} \cup A_{r'_1/r_1} \right)$$

Luego, al aplicar  $U$  obtenemos:

$$U_{(z,r'_0,r'_1)}(v_0, v_1) = U_{(z,r_0,r_1)} \left( \left( \frac{r'_0}{r_0} \right)^{L_0} v_0, \left( \frac{r'_1}{r_1} \right)^{L_0} v_1 \right)$$

Dado que los autovectores de  $L_0$  forman una base de  $V$ , supongamos que  $v_0, v_1 \in V$  tienen pesos conformes  $h_0, h_1$  respectivamente. Obtenemos entonces:

$$r_0'^{-h_0} r_1'^{-h_1} U_{(z,r'_0,r'_1)}(v_0, v_1) = r_0^{-h_0} r_1^{-h_1} U_{(z,r_0,r_1)}(v_0, v_1)$$

que depende solamente de  $v_0, v_1 \in V$  y  $z \in \mathbb{D}^\times$ .

Definimos así el operador de vértice en  $z$  correspondiente a  $v_1$  actuando en  $v_0$ :

$$\mathcal{Y}(v_1, z)v_0 := r_0^{-h_0} r_1^{-h_1} U_{(z,r_0,r_1)}(v_0, v_1)$$

y extendiendo linealmente se obtiene una aplicación

$$\mathcal{Y} : V \otimes V \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}^\times, V)$$

Desarrollando en serie con centro en 0 la función holomorfa se obtiene lo que usualmente se denomina la correspondencia *estado-operador* o *estado-campo* (ver [Kac98]).

$$\begin{aligned} Y : V \otimes V &\rightarrow V[[z^{\pm 1}]] \\ v_0 \otimes v_1 &\mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} \end{aligned}$$

Se puede ver entonces que la teoría queda determinada por los campos primarios y su interacción, codificada en la aplicación  $\mathcal{Y}$ . Los campos primarios determinan la representación del álgebra de Virasoro y, por lo tanto, el valor de la teoría en los cilindros. La aplicación  $\mathcal{Y}$  determina el valor de la teoría en el pantalón.

**Definición A.39.** Un álgebra de operadores de vértice  $(V, Y, \Omega, \omega)$  consiste en los siguientes datos. Un espacio vectorial  $V$  ( $\mathbb{Z}$  graduado).

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

tal que  $V_n$  es de dimensión finita y  $V_n = 0$  para  $n$  suficientemente pequeño.

$$Y : V \otimes V \rightarrow V[[z^{\pm 1}]]$$

$$v_0 \otimes v_1 \mapsto Y(v_1, z)v_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$

Junto con los vectores distinguidos  $\Omega \in V_0, \omega \in V_2$  tales que los siguientes axiomas se satisfacen:

1.  $\forall v_0, v_1 \in V \exists N$  tal que si  $n \geq N$  se tiene  $a_n v = 0$
2.  $Y(\Omega, z) = 1_V$
3.  $\forall v \in V$  se tiene  $Y(v, z)\Omega \in V[[z]]$  y  $Y(v, z)\Omega|_{z=0} = v$  (ie:  $v_{-1}\Omega = v$ ).
4. *Función de cuatro puntos:* Para,  $v_0, v_1, v_2$  se tiene

$$X(v_1, v_2, v_0; z, w) \in V[[z, w]][[z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]]$$

Cuyos distintos desarrollos en serie son:

- $Y(a, z)Y(b, w)c$  en  $V[[z^{\pm 1}]][[w^{\pm 1}]]$
  - $Y(b, w)Y(a, z)c$  en  $V[[w^{\pm 1}]][[z^{\pm 1}]]$
  - $Y(Y(a, z-w)b, w)c$  en  $V[[w^{\pm 1}]][[(z-w)^{\pm 1}]]$
5. Para  $\omega$ , escribimos  $Y(\omega, x) = \sum L(n)x^{-n-2}$  (o sea,  $L(n) = \omega_{n+1}$ ) y se tiene (para algún  $c \in \mathbb{C}$ :

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{c(m^3 - m)}{12} \delta_{n, -m}$$

6.  $L(0)v = nv$  si  $v \in V_n$
7.  $L(-1)$  deriva en el siguiente sentido:

$$\partial_x Y(v, x) = Y(L(-1)v, x)$$

**Observación A.40.** Para concluir la sección, es nuestra intención motivar los axiomas de álgebra de operadores de vértice geoméricamente. Es decir, cómo pueden interpretarse en el contexto de Segal. No buscamos dar una derivación completa de los mismos sino ilustrar de qué manera una VOA intenta codificar la interacción de las superficies de género cero y de qué manera, además, esta información resulta infinitesimal.

1. Esto debe pedirse. Es decir, la axiomatización de Segal no lo garantiza.
2. Observemos que

$$P_{(z,r_0,r_1)} \circ_1 \mathbb{D} = A_{r_0}$$

Por lo tanto

$$U_{(z,r_0,r_1)}(v_0, \Omega) = U\left(P_{(z,r_0,r_1)} \circ_1 \mathbb{D}\right)v_0 = U\left(A_{r_0}\right)v_0 = r_0^{L_0}v_0$$

Luego,  $\mathcal{Y}(\Omega, z)v_0 = v_0$ .

3. De manera análoga:

$$U_{(z,r_0,r_1)}(\Omega, v_1) = U\left(P_{(z,r_0,r_1)} \circ_0 \mathbb{D}\right)v_1$$

obteniendo el disco estándar  $\mathbb{D}$  al cual se le ha quitado el disco centrado en  $z$  de radio  $r_1$ . Luego,  $\mathcal{Y}(v_1, z)\Omega$  es holomorfo en  $\mathbb{D}$  (es decir, al evaluar en  $\Omega$  se pega un disco en 0 que elimina la singularidad). Ahora, al hacer  $z \rightarrow 0$  se tiene que  $P_{(z,r_0,r_1)} \circ_0 \mathbb{D} \rightarrow A_{r_1}$  y por lo tanto  $\mathcal{Y}(v_1, 0) = v_1$ .

4. Definamos de manera análoga a  $P_{(z,r_0,r_1)}$ , morfismos

$$C_3 \xrightarrow{Q_{(z,w,r_0,r_1,r_2)}} C_1$$

como el disco  $\mathbb{D}$  al cual le quitamos un disco de radio  $r_0$  centrado en 0, uno de radio  $r_1$  centrado en  $z$  y uno de radio  $r_2$  centrado en  $w$  con parametrizaciones estándar. Razonando de manera análoga, descartamos la dependencia en  $r_i$  considerando  $v_i$  de peso conforme  $h_i$  y definiendo:

$$\mathcal{X}(v_1, v_2, z, w)v_0 := r_0^{-h_0}r_2^{-h_2}r_2^{-h_2}U_{(z,w,r_0,r_1,r_2)}(v_0, v_1, v_2)$$

Este operador depende holomorfamente en  $z, w$ . Además, se tienen las siguientes identidades geométricas:

- Si existe un  $R > 0$  tal que

$$\overline{B}_{r_1}(z) \subset B_R(0) \text{ y } \overline{B}_{r_2}(w) \subset (A_R)^\circ$$

se tiene

$$Q_{(z,w,r_0,r_1,r_2)} = P_{(w,R,r_2)} \circ_0 P_{(z,r_0,r_1)}$$

- Cambiando los roles de  $z$  y  $w$ , es decir, si existe un  $R > 0$  tal que

$$\overline{B}_{r_2}(w) \subset B_R(0) \text{ y } \overline{B}_{r_1}(z) \subset (A_R)^\circ$$

se tiene

$$Q_{(z,w,r_0,r_1,r_2)} = P_{(z,R,r_1)} \circ_0 P_{(w,r_0,r_2)}$$

- Por otra parte, si existe un  $R > r_1$  tal que

$$\overline{B}_R(z) \subset (A_{r_0})^\circ \text{ y } \overline{B}_{r_2}(w) \subset B_R(z)$$

se tiene

$$Q_{(z,w,r_0,r_1,r_2)} = P_{(z,r_0,R)} \circ_1 P_{(w-z,r_0,r_2)}$$

Pasando a los operadores  $\mathcal{Y}, \mathcal{X}$  obtenemos respectivamente:

$$\mathcal{X}(v_1, v_2, z, w)v_0 = \begin{cases} \mathcal{Y}(v_2, w)\mathcal{Y}(v_1, z)v_0 \\ \mathcal{Y}(v_1, z)\mathcal{Y}(v_2, w)v_0 \\ \mathcal{Y}\left(\mathcal{Y}(w-z, v_2)v_1, z\right)v_0 \end{cases}$$

Al desarrollar en serie las distintas presentaciones de  $\mathcal{X}(v_1, v_2, z, w)v_0$  se tienen las identidades del axioma 4.

5. Observemos que un tal  $\omega$  debe ser  $\omega = L(-2)\Omega$ . Si consideramos el disco unitario con parametrización saliente concentrada en lugar  $-2$ , es decir,  $g = e^{-\epsilon 2\theta i}$  y lo pegamos en la entrada 1 de  $P_{(z,r_0,r_1)}$  obtendremos el operador de vértice correspondiente a  $e^{\epsilon L(-2)}$ . Al recalculer la dependencia en  $z$  y considerar  $\frac{d}{d\epsilon}$ , ver [Hua98] prop. 3.2.5, se recupera la expresión en cuestión.
6. El espíritu de este axioma es capturar la acción diagonal del operador  $L_0$ . En el caso de VOA, se deber recordar los pesos conformes de la teoría con estructura extra: un módulo sobre el álgebra.

7. La propiedad de  $L(-1)$  proviene de considerar en la entrada correspondiente al  $v$ , una parametrización  $g = e^{-i\theta z_0}$ , es decir, concentrada en el coeficiente  $-1$ . Considerando la siguiente identidad geométrica

$$P_{(z-z_0, r_0, r_1)} = P_{(z, r'_0, r'_1)} \circ A_g$$

y al tomar  $z_0 \rightarrow z$ , se recupera la propiedad. (Para más detalle, ver [Hua98] prop. 3.2.4.)



# Apéndice B

## Código utilizado

En la investigación realizada ha sido necesaria una gran cantidad de cálculos explícitos en el operad *Cacti*. Debido a que los mismos crecen en complejidad (cantidad de términos) rápidamente, se decidió realizar una implementación informática del operad *Cacti*. La misma se realizó en Python utilizando la suite SAGE [S+12]. A continuación se expone brevemente la forma en que esto fue realizado. Para más precisión, se incluye además una copia del código desarrollado.

En primer lugar, se decidió dejar un parámetro global  $N \in \mathbb{N}$  e implementar los cactus de a lo sumo  $N$  lóbulos. El número  $n$  será típicamente 5 o 6, aunque hemos realizado cálculos hasta  $n = 9$ . Un cactus se codifica como una tira de números enteros. La misma puede ser una lista (tipo de dato mutable, de longitud variable) o una tupla. Se utilizaron ambos, traduciendo unos por otros cuando correspondiera. En SAGE se puede construir un espacio vectorial con una base dada. Por cuestiones técnicas, la base no pueden ser objetos mutables y por lo tanto se utilizaron tuplas. En la elección de la base, una opción sería optar por los cactus  $x = (x_1, \dots, x_{n+k})$  con  $n \in \{1, \dots, N\}, l \in \{0, \dots, n-1\}$ . Sin embargo, Para sacar provecho de las herramientas dentro de SAGE, se decidió codificar un cactus  $x = (x_1, \dots, x_{n+k})$  como una permutación seguido por el cactus en orden *canónico*, esto es si  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$  es la secuencia de las primeras apariciones de cada valor, entonces  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) = (1, \dots, n)$ . Por ejemplo (1213), (1213431) son canónicos, pero (212) no (y se codifica como (121) junto con la permutación  $1 \leftrightarrow 2$ ). De esta manera, se construye para cada  $N$  de prueba el  $S_N$ -módulo libre con base los cactus canónicos.

Como es esperable, los cálculos de las composiciones parciales y del diferencial del  $dg$ -operad se realizan de manera combinatoria en los cactus y se extienden linealmente.

Asimismo, se han implementado las ecuaciones de  $\mathcal{A}_\infty$ -álgebra que se buscaba resolver. Esto es, en el proceso de construir el morfismo  $\eta$ :

$$\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\eta} \mathcal{Cacti}$$

para unos candidatos  $w_i = \eta(m_i)$   $1 \leq i \leq r$  se calcula la ecuación que debe cumplir un eventual  $w_{r+1} = \eta(m_{r+1})$ :

$$\delta(w_{r+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p+q=n+1} (-1)^{(i-1)+(p-i)q} w_p \circ_i w_q =: asoc_{r+1}$$

Además, se implementaron un par de algoritmos para resolver esa ecuación, o más en general cualquier ecuación de la forma  $\delta x = y$  para  $y$  un cactus con coeficientes enteros. El más sencillo se puede describir de la siguiente manera:

1. Se comienza con  $w = 0, a = asoc_{r+1}$ .
2. Se recorren todos los cactus  $x$  de  $r + 1$  lóbulos y dimensión  $r + 3$  y si se verifica:

$$\# \text{términos}(a \pm \delta x) < \# \text{términos}(a)$$

se cambian  $w \rightarrow w + x, a \rightarrow a \pm \delta x$ .

3. Si  $a = 0$  entonces  $w_{r+1} = w$ , si no, se vuelve al paso 2.

Debido a que la cantidad de cactus a verificar en el paso 2 crece rápidamente con  $r$ , se decidió mejorar este paso. En vez de recorrer todos los cactus de  $r + 1$  lóbulos y dimensión  $r + 3$ , se construye una lista de candidatos de la siguiente manera. Para cada término  $t$  de  $a$ , se calculan los cactus tales que  $t$  es una de sus caras. Se consigue la lista final como la unión de las listas de todos los candidatos para cada término. Esta modificación sencilla permitió realizar los cálculos explícitos hasta  $n = 9$  lo que contribuyó a la conjetura del resultado principal de esta tesis.

Por último, una vez conjeturada la factorización del morfismo  $\eta$  como

$$\mathcal{A}_\infty \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_\infty^{(2)} \xrightarrow{\mu} \mathcal{Cacti}$$

y habiendo pasado a la búsqueda de  $\mu$  se implementó de manera similar el cálculo de las ecuaciones correspondientes a  $\mathcal{A}_\infty^{(2)}$  con el detalle de que ahora las mismas están indexadas en aridad  $r + 1$  por las tiras  $\xi \in \{\square, \blacksquare\}^r$ .

Conforme se han ido calculando, se ha construido un diccionario que codifica la asignación

$$\xi \mapsto \mu(\mathbf{m}_\xi)$$

De esta manera se ha podido conseguir los ejemplos con  $\xi \in \{\square, \blacksquare\}^r$  para valores bajos ( $1 \leq r \leq 5$ ). Esto ha permitido, a su vez, contar con información suficiente como para conjeturar las proposiciones 3.3 y 3.5 así como verificar el teorema 3.8.

Por último, se han implementado las operaciones  $\square$  y  $\blacksquare$  de la definición 3.1 (llamadas *blanco* y *negro* respectivamente) y las rutinas que verificaran explícitamente dichos resultados. De esta forma se obtuvo evidencia de la validez de dichos lemas hasta  $N = 9$  (unas  $2^9$  ecuaciones, varias de las cuales con de miles términos).

## Código fuente

A continuación se adjunta el código fuente de la implementación descrita anteriormente. El símbolo  $\searrow$  indica la continuación de la línea anterior, en contrapartida al comienzo de una nueva.

### cacti.sage

```

from sage.all import *

#Decide si una suryección es un cactus
def is_cactus_can(f):
    n = (f.codomain()).cardinality()
    m = (f.domain()).cardinality()
    for i in range(m-1):
        if f(i) == f(i+1):
            return False
    l = []
    for k in range(m):
        if l.count(f(k))==0:
            l.append(f(k))
    if l != range(n):
        return False
    subseq = [ [f(x1),f(x2), f(x3), f(x4)] for x1 in range(m) for x2 in range(x1+1,m) for
        \ x3 in range(x2+1,m) for x4 in range(x3+1,m)]
    for l in [ [i,j,i,j] for i in range(n) for j in range(n) if j != i ]:
        if l in subseq:
            return False
    return True

#Decide si una lista es un cactus
def is_cactus_a_list(l):
    n = max(l)
    m = len(l)
    for i in range(m-1):

```

```

        if l[i] == l[i+1]:
            return False
    laux = []
    for k in range(n):
        if l.count(k+1)==0:
            return False
    subseq = [ [l[x1],l[x2], l[x3], l[x4]] for x1 in range(m) for x2 in range(x1+1,m) for
    \ x3 in range(x2+1,m) for x4 in range(x3+1,m)]
    for laux in [ [i,j,i,j] for i in range(1,n+1) for j in range(1,n+1) if j != i ]:
        if laux in subseq:
            return False
    return True

#Genera todos los cactus k-dimensionales con n lóbulos
def gen_c_can(n,k):
    cacti = []
    maps = FiniteSetMaps(n+k,n)
    for f in maps:
        if is_cactus_can(f):
            cacti.append( tuple([f(x)+1 for x in range(n+k)]) )
    return cacti

#Genera todos los cactus con n lóbulos
def gen_cacti_can(n):
    cacti = []
    for k in range (n):
        cacti = cacti + gen_c_can(n,k)
    return cacti

#Genera todos los cactus con a lo sumo n lóbulos
def gen_cacti_can_up_to(n):
    cacti = []
    for i in range(1,n+1):
        cacti = cacti + gen_cacti_can(i)
    return cacti

#Genera el espacio V de cactus con a lo sumo n lóbulos
def gen_cacti_new(n):
    l = [(1,)]
    for k in range(2,n+1):
        laux = [t for t in l if max(t) == k-1]
        for t in laux:
            r = len(t)
            last = max([j for j in range(r) if t[j] == k-1])
            for i in range(last,r):
                l.append(tuple([t[j] for j in range(i)] + [t[i],k] + [t[j] for j in
                \ range(i+1,r)]))
                l.append(tuple([t[j] for j in range(i)] + [t[i],k,t[i]] + [t[j] for j in
                \ range(i+1,r)]))
    return l

#Dado un elemento del espacio MM lo muestra de manera entendible.
def mostrar(v):
    if v in MM:
        if v == MM.zero_element():
            print '0'
        else:
            for t in terms(v):
                tt = expand(t)
                if tt[2] > 0:
                    print '+',

```

```

        if tt[2] == -1:
            print '-',
        elif tt[2] != 1:
            print expand(t)[2],
        print join(['(' + str(i) for i in to_listcacti(tt)] + ')', ''),
        print ' '
#Idem
def mostrar_out(v):
    res = ''
    if v in MM:
        if v == MM.zero_element():
            res = '0'
        else:
            for t in terms(v):
                tt = expand(t)
                if tt[2] > 0:
                    res = res + '+'
                if tt[2] == -1:
                    res = res + '-'
                elif tt[2] != 1:
                    res = res + str(expand(t)[2]) + '*'
                res = res + 'ca(' + join([str(i) for i in to_listcacti(tt)], '') + ')'
    return res

#Calcula el borde de un cactus
def bound(ca):
    v = MM.zero_element()
    for t in terms(ca):
        c = to_listcacti(expand(t))
        m = len(c)
        s = 1
        signs = {}
        arcs = [ j for j in range(m) if c.count(c[j]) > 1]
        for i in arcs:
            if [j for j in range(i+1,m) if c[j] == c[i]] != []:
                signs[i] = s
                s = -s
            else:
                last = [j for j in range(i) if c[j] == c[i]].pop()
                signs[i] = - signs[last]
        v = v + signs[i] * expand(t)[2] * el([c[j] for j in range(m) if j != i])
    return v

#Devuelve la representación (cactus canónico,permutación) de un cactus dado por una lista
def to_symcacti(c):
    i = 1
    dic = {}
    l = []
    for k in c:
        if not dic.has_key(k):
            dic[k] = i
            i = i + 1
        l.append(dic[k])
    return (Permutation(dic.values()).inverse(), tuple(l))

#Devuelve la lista correspondiente a un cactus dado por (cactus canónico,permutación)
def to_listcacti(c):
    p = c[1]
    l = list(c[0])
    ca = []

```

```

    for k in l:
        ca.append(p(int(k)))
    return ca

#Genera el cactus dado por una tira
def ca(n):
    ca = n.digits()
    ca.reverse()
    return el(ca)

#Genera el cactus dado por una lista
def el(c):
    global n, ba, Alg, MM
    i = 1
    dic = {}
    l = []
    for k in c:
        if not dic.has_key(k):
            dic[k] = i
            i = i + 1
        l.append(dic[k])
    cc = tuple(l)
    return Alg(Permutation(dic.values()).inverse()) * MM.basis()[cc]

#Sustituye la permutación q en el valor i de p.
def sust(p,a,q):
    lq = [b + a-1 for b in list(q)]
    lp = []
    for x in list(p):
        if x <= a:
            lp.append(x)
        else:
            lp.append(x + len(lq) -1)
    i = lp.index(a)
    result = Permutation([lp[j] for j in range(i)] + lq + [lp[j] for j in range(i + 1,
        ↘ len(lp))])
    return result

#Sustituye elementos del álgebra simétrica
def s(x,a,y):
    result = Alg.zero_element()
    for i in x.support():
        for j in y.support():
            result = result + x.monomial_coefficients().get(i) *
            ↘ y.monomial_coefficients().get(j) * Alg(Permutation(sust(i, a, j)))
    return result

#calcula la composición parcial i-ésima
def o_i(ca1,i,ca2):
    res = MM.zero_element()
    for t1 in terms(ca1):
        for t2 in terms(ca2):
            t1ex = expand(t1)
            t2ex = expand(t2)
            a = to_listcacti(t1ex)
            b = to_listcacti(t2ex)
            A = len(a)
            B = len(b)
            r = a.count(i)
            if r == 0:
                return 'error, lobe ', i, 'not in ',a

```

```

ocur_i = [j for j in range(A) if a[j] == i]
a2 = copy(a)
for j in [k for k in range(A) if a[k] > i]:
    a2[j] = a2[j] + max(b) - 1
div_a = [[a2[j] for j in range(0,ocur_i[0])]] + [[a2[j] for j in
    ↘ range(ocur_i[k]+1, ocur_i[k+1])] for k in range(r-1)] + [[a2[j] for
    ↘ j in range(ocur_i[r-1]+1,A)]]
dim_div_a = [len([k for k in range(1,ocur_i[0]) if [j for j in range(k,A) if
    ↘ a[j]==a[k-1]]!=[]])] + [len([k for k in
    ↘ range(ocur_i[t]+1,ocur_i[t+1]) if [j for j in range(k,A) if
    ↘ a[j]==a[k-1]]!=[]])] for t in range(r-1)] + [len([k for k in
    ↘ range(ocur_i[r-1]+1,A) if [j for j in range(k,A) if
    ↘ a[j]==a[k-1]]!=[]])]
b2 = [k + i - 1 for k in b]
aib = []
for subseq in [s for s in FiniteSetMaps(r+1,B).list() if s[0]==0 and
    ↘ s[r]==B-1 and [j for j in range(r) if s[j+1] < s[j]] == []]:
    aib = copy(div_a[0])
    for k in range(r):
        aib = aib + [b2[j] for j in range(subseq[k],subseq[k+1]+1)] +
            ↘ div_a[k+1]
    dim_div_b2 = [len([k for k in range(subseq[t]+1,subseq[t+1]+1) if [j for
    ↘ j in range(k,B) if b[j]==b[k-1]]!=[]])] for t in range(r)]
    sign = (-1)**(sum([dim_div_b2[j] * sum([dim_div_a[k] for k in
    ↘ range(j+1,r+1) ] ) for j in range(r) ])) #signo de Koszul
    res = res + sign * tlex[2] * t2ex[2] * el(aib)
return res

#Calcula la lista de los términos de un elemento de MM
def terms(c):
    terms = []
    for x in c.support():
        for coef in c.coefficient(x).support():
            t = c.coefficient(x).coefficient(coef) * Alg(coef) * MM.basis()[x]
            terms.append(t)
    return terms

#Desglosa un término para poder extraer su coeficiente, permutación y cactus canónico
def expand(t):
    return (t.support()[0], t.coefficients()[0].support()[0],
        ↘ t.coefficients()[0].coefficients()[0])

#Devuelve el grado de un término
def dim(t):
    if type(t) == tuple or type(t) == list:
        return len(t) - max(t)
    else:
        return len(expand(t)[0]) - max(expand(t)[0])

#Calcula las caras de un cactus
def faces(c):
    fa=[]
    m = len(c)
    s = 1
    signs = {}
    arcs = [j for j in range(m) if c.count(c[j]) > 1]
    for i in arcs:
        fa.append(tuple([c[j] for j in range(m) if j != i]))
    return fa

#Calcula todas las caras de las caras
def allfaces(c):

```

```

    if len(c) - max(c) > 1:
        return [allfaces(x) for x in faces(c)]
    else:
        return faces(c)

#Calcula la lista de cactus tales que bound(_) = c para c un símlice
def de_bound(c):
    res = []
    for t in terms(c):
        coef = expand(t)[2]
        l = to_listcacti(expand(t))
        n = max(l)
        m = len(l)
        for k in range(1,n+1):
            for i in range(m):
                laux = copy(l)
                laux.insert(i,k)
                if is_cactus_a_list(laux):
                    res.append(el(laux))
            laux = copy(l)
            laux.append(k)
            if is_cactus_a_list(laux):
                res.append(el(laux))
    return res

#Calcula los vértices de un cactus
def vertices(c):
    if len(c) - max(c) > 1:
        l = []
        for x in faces(c):
            l = l + vertices(x)
        return list(set(l))
    else:
        return faces(c)

#Contesta si dos símlices comparten algún vértice.
def adjacentes(a,b):
    return set(vertices(a)).intersection(set(vertices(b))) != set([])

#Calcula para un elemento en MM sus adyacencias
def adjac(c):
    ad = {}
    for t in terms(c):
        for x in terms(bound(t)):
            plain_x = tuple(to_listcacti(expand(x)))
            if ad.has_key(plain_x):
                ad[plain_x].append(t)
            else:
                ad[plain_x] = [t]
    return ad

#Busca resolver la ecuacion bound(x) = a
def bruteforcer(a):
    m = MM.zero_element()
    aux = a
    for c in [el(c) for c in ba if dim(c) == dim(a) + 1 and max(c) == max(expand(a)[0])]:
        for g in Alg.basis():
            x = g * c
            go = True

```

```

        while go:
            if cant_term(aux -bound(x) ) < cant_term(aux):
                m = m + x
                aux = aux - bound(x)
                mostrar(m)
            elif cant_term(aux +bound(x) ) < cant_term(aux):
                m = m - x
                aux = aux + bound(x)
                mostrar(m)
            else:
                go = False
    return m

#Busca resolver la ecuacion bound(x) = aux
def bruteforcer_2(aux):
    m = MM.zero_element()
    go = True
    while go:
        go = False
        for x in de_bound(aux):
            if cant_term(aux -bound(x) ) < cant_term(aux):
                m = m + x
                aux = aux - bound(x)
                print '.',
                go = True
            elif cant_term(aux +bound(x) ) < cant_term(aux):
                m = m - x
                aux = aux + bound(x)
                print '.',
                go = True
    return m

#Devuelve la cantidad de términos en un elemento c
def cant_term(c):
    return sum([abs(expand(t)[2]) for t in terms(c)])

#Intercambia dos formatos posibles de etiquetas
def xi(l):
    ll = []
    for x in l:
        if x =='.':
            ll.append(True)
        elif x == 'o':
            ll.append(False)
        elif x:
            ll.append('.')
        elif not(x):
            ll.append('o')
    return ll

#Genera todas las etiquetas hasta longitud r
def all_lists(r):
    listas = []
    for x in Subsets(range(r)):
        l = []
        for i in range(r):
            l.append(i in x)
        listas.append(l)
    return listas

#Dada una lista, separa los terminos de la forma l de un elemento m

```

```

def separate(l,m):
    mm = MM.zero_element()
    for t in terms(m):
        tt = to_listcacti(expand(t))
        tt_ok = True
        for i in range(len(l)):
            if (tt.index(i+1) < tt.index(i+2)) != l[i]:
                tt_ok = False
        if tt_ok:
            mm = mm + t
    return mm

#agrega al diccionario d un m_n separado en sus m_xi
def addtodic(c ,d):
    r = max(expand(c)[0])
    for x in all_lists(r-1):
        if not(d.has_key(tuple(x))):
            d[tuple(x)] = separate(x,c)
    return d

#Calcula la ecuación r-ésima de A a partir de la lista l
def calc_asoc(r,l):
    asoc = MM.zero_element()
    for k in range(2,r):
        q = r-k+1
        for i in range(1,k+1):
            asoc = asoc + (-1)**((i-1) + q*(k-i)) * o_i(l[k-2], i, l[q-2 ])
    return asoc

#Calcula la ecuación de A2 correspondiente a una etiqueta a partir un diccionario
def calc_asoc_bis(l, dic):
    asoc = MM.zero_element()
    r = len(l) + 1
    for k in range(2,r):
        q = r-k+1
        for i in range(1,k+1):
            mk = dic[tuple([ l[j] for j in range(r-1) if j not in range(i-1 , i -1+q
                \ -1)])]
            mq = dic[tuple([ l[j] for j in range(i-1 , i -1 +q -1)])]
            asoc = asoc + (-1)**((i-1) + q*(k-i)) * o_i(mk, i, mq)
    return asoc

#Calcula composición de etiquetas
def comp_i(x,i,y):
    return tuple([x[j] for j in range(i-1)] + list(y) + [x[j] for j in range(i-1,len(x))])

#auxiliar de mudelt
def partial(i,x):
    res = MM.zero_element()
    n = len(x) + 1
    for q in range(2,min(n-i+2,n)):
        xk = tuple([x[j] for j in range(i-1)] + [x[j] for j in range(q+i-2,len(x))])
        xq = tuple([x[j] for j in range(i-1, q + i-2)])
        mk = dmm[xk]
        mq = dmm[xq]
        k = n - q + 1
        res = res + (-1)**((i-1) + q*(k-i)) * o_i(mk, i, mq)
    return res

```

```

#Calcula el borde en A2inf y después el morfismo mu
def mupartial(x):
    res = MM.zero_element()
    n = len(x)
    for i in range(1,n+1):
        res = res + partial(i,x)
    return res

#La operacion "negro"
def negro(c):
    m = MM.zero_element()
    for t in terms(c):
        tt = to_listcacti(expand(t))
        r = max(tt)
        s = len(tt)
        i = tt.index(r)
        coef = expand(t)[2]
        for j in range(i+1,s):
            newterm = el([tt[k] for k in range(j+1)] + [r+1] + [tt[k] for k in
                ↘ range(j,s)])
            sign = -(-1)**(len([ k for k in range(j) if [kk for kk in range(k+1,s) if
                ↘ tt[kk]==tt[k]]!=[] ])) + s - r)
            m = m + sign * coef * newterm
    return m

#La operacion "blanco"
def blanco(c):
    m = MM.zero_element()
    for t in terms(c):
        tt = to_listcacti(expand(t))
        r = max(tt)
        s = len(tt)
        i = tt.index(r)
        coef = expand(t)[2]
        for j in range(i):
            newterm = el([tt[k] for k in range(j+1)] + [r+1] + [tt[k] for k in
                ↘ range(j,s)])
            sign = (-1)**(len([ k for k in range(j) if [kk for kk in range(k+1,s) if
                ↘ tt[kk]==tt[k]]!=[] ])) + s - r)
            m = m + sign * coef * newterm
    return m

#Devuelve la lista de todos los cactus tales que k aparece solo una vez.
def cactussimples(k):
    return [c for c in ba if max(c) == k and list(c).count(k) == 1]
for c in cacti_to_look_up:
    m = len(c)
    for g in Permutations(k).list():
        l = [g(c[i]) for i in range(m)]
        subseq = [ (l[x1],l[x2], l[x3]) for x1 in range(m) for x2 in range(x1+1,m)
            ↘ for x3 in range(x2+1,m)]
        badsubs = [r for r in subseq if r[0] == r[2] and r[0] != r[1] and r[1] <=
            ↘ r[0]+1]
        if badsubs == []:
            cacti.append(el(l))
    return cacti

#Calcula la lista de todos los cactus en C'(k)
def cactusbuenos(k):

```

```

cacti = []
cacti_to_look_up = [c for c in ba if max(c) == k and ((len(c) - k) == (k - 2))]
for c in cacti_to_look_up:
    m = len(c)
    for g in Permutations(k).list():
        l = [g(c[i]) for i in range(m)]
        subseq = [ (l[x1],l[x2], l[x3]) for x1 in range(m) for x2 in range(x1+1,m)
                    \ for x3 in range(x2+1,m)]
        badsubs = [r for r in subseq if r[0] == r[2] and r[0] != r[1] and r[1] <=
                    \ r[0]+1]
        if badsubs == []:
            cacti.append(e1(l))
return cacti

#Verifica la propiedad de las construcciones blanco y negro para cactus simples
def test_prop(r):
    for c in cactussimples(r):
        d = dim(c)
        mostrar(c)
        print bound(negro(c)) - negro(bound(c)) == (-1)**d * (o_i(ca(12),1,c) -
                    \ o_i(c,r,ca(12))),
        print bound(blanco(c)) - blanco(bound(c)) == (-1)**d * (o_i(ca(21),1,c) -
                    \ o_i(c,r,ca(21)))

#Verifica el la compatibilidad del borde y mu
def test_bound_lemma(r):
    listaux = [x for x in dmm.keys() if len(x) == r and x[0] != x[1] ] #and x[len(x)-1] ==
                \ False ]
    for x in listaux:
        n = len(x)
        print ''.join(xi(x)),
        x2 = list(x)
        y = x2.pop()
        x2 = tuple(x2)
        if y:
            print bound(dmm[x]) == (-1)^n * ( o_i(ca(12),1,dmm[x2])) -
                    \ o_i(dmm[x2],n,ca(12))) - negro(bound(dmm[x2])), ' || ',
        else:
            print bound(dmm[x]) == (-1)^n * ( o_i(ca(21),1,dmm[x2])) -
                    \ o_i(dmm[x2],n,ca(21))) - blanco(bound(dmm[x2])), ' || ',

#Verifica el teorema de manera directa
def test_teo(r):
    for k in range(3,r+1):
        kkeys = [t for t in dmm.keys() if len(t) == k and t[0] != t[1]]
        for t in kkeys:
            print ''.join(xi(t)) + ': ' + str(calc_asoc_bis(t,dmm) == bound(dmm[t]))

#Sector principal del código, inicializa el espacio MM

#Se considerarán cactus de a lo sumo n lóbulos
n = 9

#ba es la base del espacio
ba = gen_cacti_new(n)

#Alg es el álgebra de grupo de S_n
Alg = SymmetricGroupAlgebra(QQ, n)

```

```

#MM es espacio ambiente, el módulo libre sobre Alg con base ba
MM = CombinatorialFreeModule(Alg, ba, prefix='c')

#Inicializa el diccionario dmm que asigna a cada etiqueta xi su mu(m_xi)
dmm = {}
dmm[tuple([True])] = ca(12)
dmm[tuple([False])] = ca(21)

for i in range(2,n):
    for l in all_lists(i):
        laux = copy(l)
        x = laux.pop()
        if x:
            dmm[tuple(l)] = negro(dmm[tuple(laux)])
        else:
            dmm[tuple(l)] = blanco(dmm[tuple(laux)])

```



# Bibliografía

- [Ati89] M. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Publications Mathématiques de l’IHÉS **68** (1989), 175–186.
- [Bau81] H. Baues, *The double bar and cobar constructions*, Compositio Mathematica **43** (1981), no. 3, 331–341.
- [BF04] C. Berger and B. Fresse, *Combinatorial operad actions on cochains*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **137** (2004), no. 1, 135–174.
- [BR10] E. Burgunder and M. Ronco, *Tridendriform structure on combinatorial Hopf algebras*, Journal of Algebra **324** (2010), no. 10, 2860 – 2883.
- [BV73] M. Boardman and R. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lect. Notes Math., vol. 347, Springer-Verlag, 1973.
- [Cha02] F. Chapoton, *Opéradés différentielles graduées sur les simplexes et les permutoèdres*, Bull. Soc. Math. France **130** (2002), no. 2, 233–251.
- [Cos07] K. Costello, *Topological conformal field theories and calabi-yau categories*, Advances in Mathematics **210** (2007), no. 1.
- [DFMS97] Philippe Di Francesco, Pierre Mathieu, and David Sénéchal, *Conformal field theory*, Graduate texts in contemporary physics, Springer, New York, 1997.
- [DL06] M Daily and T Lada, *Symmetrization of brace algebras*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. (2006), no. 79, 75–86. MR 2287127 (2007h:18011)
- [Dot09] V. Dotsenko, *Compatible associative products and trees*, Algebra and Number Theory **3** (2009), no. 5, 567–586.
- [Fre92a] D Freed, *1992 lectures on topological quantum field theory*, [www.ma.utexas.edu/users/dafr/01dTQFTLectures.pdf](http://www.ma.utexas.edu/users/dafr/01dTQFTLectures.pdf).
- [Fre92b] ———, *Remarks on Chern-Simons theory*, [arxiv.org/abs/0808.2507v2](http://arxiv.org/abs/0808.2507v2).

- [GCTV12] I. Gálvez-Carrillo, A. Tonks, and B. Vallette, *Homotopy Batalin-Vilkovisky algebras*, J. Noncommut. Geom. **6** (2012), no. 3, 539–602.
- [Ger63] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Annals of Mathematics **78** (1963), no. 2, pp. 267–288.
- [Get94] E. Getzler, *Batalin-vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), no. 2, 265–285.
- [GJ94] E. Getzler and J. Jones, *Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces*, [arxiv.org/abs/hep-th/9403055](https://arxiv.org/abs/hep-th/9403055), 1994.
- [GK94] V. Ginzburg and M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 1, 203–272.
- [GLT13] I. Gálvez-Carrillo, L. Lombardi, and A. Tonks, *An  $A$ -infinity operad in spineless cacti*, [arxiv.org/abs/1304.0352](https://arxiv.org/abs/1304.0352), 2013.
- [GV95] M. Gerstenhaber and A. Voronov, *Homotopy  $G$ -algebras and moduli space operad*, Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 3, 141–153 (electronic). MR 1321701 (96c:18004)
- [GW85] R. Goodman and N.R. Wallach, *Projective unitary positive-energy representations of  $\text{diff}(s)$* , Functional Analysis **63** (1985).
- [Hir94] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, New York, 1994.
- [HN93] J. Hilgert and K-H. Neeb, *Lie semigroups and their applications*, Lect. Notes in Math., vol. 1552, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.
- [Hua98] Y.-Z. Huang, *Two-dimensional conformal geometry and vertex operator algebras*, Progress in Math., vol. 148, Birkhäuser Verlag, Boston, 1998.
- [Kac98] V. Kac, *Vertex algebras for beginners*, 2 ed., University Lecture Series, vol. 10, American Mathematical Society, Providence, 1998.
- [Kad05] T. Kadeishvili, *On the cobar construction of a bialgebra*, Homology, Homotopy and Applications **7** (2005), no. 2, 109–122.
- [Kau07] R. Kaufmann, *On spineless cacti, Deligne’s conjecture and Connes-Kreimer’s Hopf algebra*, Topology **46** (2007), no. 1, 39–88.
- [KLP03] R. Kaufmann, M. Livernet, and R. C. Penner, *Arc operads and arc algebras*, Geom. Topol. **7** (2003), 511–568.
- [Kon95] M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proc. of the ICM, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994, Birkhäuser, 1995, pp. 120–139.

- [LM05] T. Lada and M. Markl, *Symmetric brace algebras*, Applied Categorical Structures **13** (2005), no. 4, 351–370.
- [LR10] J.-L. Loday and M. Ronco, *Combinatorial Hopf algebras*, Quanta of maths, Clay Math. Proc., vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 347–383.
- [LV12] J.L. Loday and B. Vallette, *Algebraic operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 346, Springer, Heidelberg, 2012.
- [May72] J.P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 271, Springer-Verlag, 1972.
- [Men04] L. Menichi, *Batalin-Vilkovisky algebras and cyclic cohomology of Hopf algebras*, K-Theory **32** (2004), no. 3, 231–251.
- [MS89] G. Moore and N. Seiberg, *Classical and quantum conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), no. 2, 177–254.
- [MS02] J. McClure and J. Smith, *A solution of Deligne’s Hochschild cohomology conjecture*, Recent progress in homotopy theory (Baltimore, MD, 2000), Contemp. Math., vol. 293, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 153–193.
- [MSS02] M. Markl, S. Shnider, and J. Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 96, American Mathematical Society, 2002.
- [Mur11] F. Muro, *Homotopy theory of non-symmetric operads*, Algebr. Geom. Topol. **11** (2011), no. 3, 1541–1599.
- [OG05] J.-M. Oudom and D. Guin, *Sur l’algèbre enveloppante d’une algèbre pré-Lie*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **340** (2005), no. 5, 331–336.
- [Pol98] J. Polchinski, *String theory, volume 1: An introduction to the bosonic string*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Qui85] D. Quillen, *Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface*, Funkts. Anal. Prilozh. **19** (1985).
- [Ron00] M. Ronco, *Primitive elements in a free dendriform algebra*, New Trends in Hopf Algebra Theory: Proceedings of the Colloquium on Quantum Groups and Hopf Algebras, La Falda, Sierras de Córdoba, Argentina, August 9-13, 1999, Contemp. Math., vol. 267, American Mathematical Society, 2000, pp. 245–264.
- [S<sup>+</sup>12] W. A. Stein et al., *Sage Mathematics Software (Version 5.0.1)*, The Sage Development Team, 2012, [www.sagemath.org](http://www.sagemath.org).

- [Sch08] M. Schottenloher, *A mathematical introduction to conformal field theory*, 2 ed., Lect. Notes in Phys., vol. 759, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [Seg04] G. Segal, *The definition of conformal field theory*, London Math. Soc. Lect. Notes, vol. 308, pp. 421–577, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [Sta63] J. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces. I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), no. 2, 275–312.
- [Ste95] D. Stefan, *Hochschild cohomology on Hopf Galois extensions*, Journal of Pure and Applied Algebra **103** (1995), no. 2, 221 – 233.
- [Str08] H. Strohmer, *Operads of compatible structures and weighted partitions*, Journal of Pure and Applied Algebra **212** (2008), no. 11, 2522 – 2534.
- [Vor05] A. Voronov, *Notes on universal algebra*, Graphs and Patterns in Mathematics and Theoretical Physics (M. Lyubich and L. Takhtajan, eds.), Proc. Sympos. Pure Math, American Mathematical Society, 2005, pp. 81–103.
- [Wit88] E. Witten, *Topological sigma models*, Comm. Math. Phys. **118** (1988), no. 3, 411–449.
- [You13] J. Young, *Brace bar-cobar duality*, [arxiv.org/abs/1309.2820](https://arxiv.org/abs/1309.2820) (2013).
- [ZBG12] Y. Zhang, C. Bai, and L. Guo, *The category and operad of matching dialgebras*, Appl Categor Struct (2012).
- [Zha13] Y. Zhang, *Homotopy transfer theorem for linearly compatible dialgebras*, J. of Homotopy and Relat. Str. **8** (2013), no. 1, 141–150.
- [Zhu96] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 237–302.
- [Zin10] G.W. Zinbiel, *Encyclopedia of types of algebras*, Operads and universal algebra, Nankai Series in Pure, Applied Mathematics and Theoretical Physics, vol. 9, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010.